

## ***Содержание***

|  |            |
|--|------------|
| <b>Предисловие</b> . . . . .   | <b>5</b>   |
| <b>Введение</b> . . . . .  | <b>11</b>  |
| <b>Глава 1. Развитие математических способностей:</b>  |            |
| <b>общие принципы</b> . . . . .  | <b>38</b>  |
| 1. Математика как наука и содержание образования . . .   | 38         |
| 2. Математика как предмет образования . . . . .  | 46         |
| 3. Математическая способность<br>и возможности ее развития . . . . .   | 54         |
| <b>Глава 2. Цели и подходы<br/>к развитию математических способностей</b> . . . . .  | <b>60</b>  |
| 1. Сложившиеся подходы и их цели . . . . .   | 60         |
| 2. Новые контексты и приоритеты . . . . .  | 69         |
| 3. Возрастные условия, задачи<br>и результаты математического образования . . . . .  | 78         |
| <b>Глава 3. Типы и формы открытого образования<br/>в области математики</b> . . . . .  | <b>91</b>  |
| <b>Общие выводы</b> . . . . .  | <b>99</b>  |
| <b>Литература и источники</b> . . . . .  | <b>101</b> |
| <b>Приложение. Результаты анализа практик дополнительного<br/>образования, направленных на развитие<br/>математических способностей обучающихся, на основе<br/>материалов, представленных субъектами РФ</b> . . . . .      | <b>104</b> |
| 1. Методология организованного анализа<br>представленных субъектами Российской Федерации<br>описаний практик дополнительного образования,<br>направленных на развитие математических<br>способностей обучающихся . . . . . | 104        |

*Во время подготовки данного издания ушел  
из жизни Семен Вячеславович Ермаков.  
Наш друг, коллега и соавтор.  
Светлая память.*

## ***Предисловие***

Понятие и феномен «открытого образования» уже давно присутствует в российской педагогике, в ее теоретическом и особенно в ее практическом измерениях. Но до последнего времени проекты и программы, обозначавшие себя как «открытые образовательные», воспринимались как заведомо над- и метапредметные по направленности, обеспечивающие, скорее, образование и усиление индивидуальных способностей, чем освоение предметных знаний. К этому еще добавлялся стереотип о том, что открытое дополнительное образование, в силу того, что оно не только «дополнительное», но и «открытое», а значит, скорее всего, не нормированное и не институционализированное, — представляет собой совокупность *экспериментов*. Следовательно, эти проекты и практики, вероятно, интересны и значимы, но сами по себе единичны и одноразовы, а значит, заведомо не могут обеспечить системные образовательные и культурные результаты.

Такие представления уже можно считать заведомо устаревшими. В основном тексте книги читатель увидит, что проекты и практики открытого дополнительного образования приобрели регулярный характер, и для их обеспечения начали выстраивать особые институты — не препятствующие, а, наоборот, поддерживающие «открытость». И все-таки, открытое образование в представлении большинства специалистов остается частным сегментом дополнительного образования «в целом» и уж подавно — лишь частью огромного массива «деятельностных образовательных технологий», рассчитанных в том числе и на использование в школьном образовании.

Почему же тогда книга, которую вы держите в руках, посвящена формированию математического мышления именно силами открытого образования, а не всего комплекса новых образовательных технологий? Что важного содержится в технологиях и подходе именно открытого дополнительного образования не просто для изучения математических знаний, а формирования математического мышления как способа решать широкий класс задач, связанный с практическим использованием этого знания, в том числе задачи работы с собственной картиной мира?

Чтобы ответить на этот вопрос, нужно обратиться к общей логике обновления математического образования в нашей стране.

С одной стороны, математика представляет собой признанную *вечную* культурную ценность, и пафос включения математического знания в большом объеме в общее образование состоит именно в этой *вечности*. Достаточно заметить, что евклидова геометрия, занимающая значительную часть времени и внимания школьника, благополучно пережила все реформы образования, сохранившись почти в том виде, в каком она сформировалась в древности.

Но такой подход к математике в чем-то сопоставим с ролью, которую играли мертвые языки в старых гимназиях. Да, математика, как и латынь, является одним из достояний нашей цивилизации, универсальной практикой освоения сложных мыслительных структур — но насколько представлена эта сторона математики и массовому ученику, и массовому учителю?

На практике эта *вечность* оборачивается необходимостью осваивать (часто — заучивать) и отрабатывать непонятные правила, в целом грамотно рассуждать неизвестно о чем. В лучшем случае у хороших учителей, у увлеченных школьников, при наличии хорошей дополнительной литературы, математика — это набор игр и головоломок, не менее увлекательных, чем, например, шахматы, и имеющих примерно такое же отношение к жизни.

В то же время авторы новых программ постоянно напоминают, что современные инженерные технологии и современная экономика невозможны без сложной математики. И поэтому различные разделы современной прикладной математики (и сведения об ее приложениях) также должны включаться в школьный курс и, следовательно, адаптироваться к изучению школьниками, прежде всего к их объективным интересам и потребностям, в том числе обусловленным возрастом.

Напомним, что многие реформы математического образования в XX веке были вызваны именно необходимостью решать подобные задачи. Достаточно вспомнить советскую политехническую школу, где математические и естественно-научные курсы были насыщены знанием, которое должно потом пригодиться в инженерных вузах и техникумах. Но большинством школьников эти знания также воспринимались как отвлеченные, не привязанные к реальности, несмотря на все попытки преподавать теорию максимально наглядно и брать задачи «из жизни».

Немного предвосхитим те мысли и идеи, которые изложили авторы настоящего издания и с которыми читатель подробнее позна-

комится дальше. Предположим, что дело здесь не в самом по себе содержании математических курсов, отвлеченном или прикладном, и не в частных методиках преподавания, построения учебников и задачников.

Дело именно в «должно пригодиться».

Должно пригодиться умение рассуждать логически, на основе конечного набора посылок, мысленно конструируя предмет рассуждения, как в евклидовой геометрии. Должно пригодиться умение преобразовывать выражения, вычислять, применять формулы, как в алгебре и физике. Но это значит, что время, когда школьник поймет смысл и важность того, что он изучал, отодвигается в некое не вполне ясное будущее. В лучшем случае — в будущее, когда он станет студентом.

Но именно задача обеспечить такое образование, которое сможет заведомо *пригодиться* ученикам, оказывается затруднительной не только для традиционного образования, опирающегося на классно-урочную систему и соответствующие ей методы и приемы, но и для многих форм «нового», деятельностно-организованного образования, в том числе дополнительного. Проблема состоит в том, что даже в деятельностных образовательных формах, посвященных не учебным предметам, а реальным практикам, ученики зачастую действуют в искусственно сконструированной ситуации, так что результаты их деятельности фактически никак не используются. В результате образовательная ситуация предстает столь же оторванной от жизни, как и в случае с преподаванием предметов вне практического контекста, — хотя формально речь идет о деятельностном и зачастую дополнительном образовании, и уж точно о «новых» образовательных технологиях. Показательной здесь является ситуация олимпиадного движения, которое, будучи задумано как способ расширения и «оживления» предметных знаний, внесения в него задачного подхода, в результате все больше оказывается «вещью в себе», результаты которой востребованы преимущественно внутри самого движения — об этом подробно рассказано в предлагаемой книге.

И именно поэтому становятся предельно важны и востребованы те возможности, которые объективно заложены в подходе открытого дополнительного образования.

С одной стороны, оно, в отличие от «традиционного» дополнительного образования, реализуемого в рамках конкретных учреждений и их образовательных программ и учебных планов, свободно от обязательных регламентированных требований к методической

форме и формализованному учебно-образовательному результату. С другой стороны, оно позволяет себе ставить различные цели по отношению к разным группам детей и подростков. Спектр таких целей может быть очень широким — от популяризации отдельных достижений математики и математического взгляда на мир в целом до включения тех школьников, которых принято называть *одаренными*, в сферы исследований и разработок, связанных с современной сложной математикой.

Прежде всего, школьникам предлагается непосредственно погрузиться в ситуацию, в которой математическое знание может быть применено для решения очевидной практической или игровой проблемы. В идеале математическую составляющую еще нужно суметь извлечь из проблемной ситуации, вспомнить уже знакомые схемы или даже самостоятельно построить новую модель, совершить собственное математическое открытие.

Тем самым математика *оживает*, становится по-настоящему гуманитарной формой жизни человеческого мышления и деятельности в сопряжении реального мира и идеального мира *вечных истин*. Одновременно снимается противоречие, обозначенное нами в начале: сами способы и приемы математического мышления, запас уже накопленных знаний остаются инвариантом, само же наполнение проблемных ситуаций может меняться в зависимости от специфики целевой аудитории, поставленных задач, от того, какую сферу применения математики необходимо показать.

Особо важна здесь «открытость» как базовое качество этого образовательного подхода в ее подлинном, изначальном смысле. С одной стороны, она предполагает максимально широкий спектр источников получения учеником знаний и представлений о действительности, освоения способов и методов деятельности. В этой ситуации в центре образовательного процесса оказывается цель и интерес самого ученика, реализующиеся в процессе реальной деятельности, для которой любое знание или возможность усилить способности становится ресурсом, но не самоцелью, а педагог — навигатором относительно этих источников, а не носителем единой и непреложной истины. С другой стороны, открытость предполагает, что цели и интересы ученика лежат не в специально сконструированной и «препарированной» ситуации, а в реальном мире как системе явлений и отношений, в том или ином экономическом, социальном, социокультурном пространстве или на пересечении таких пространств — в зависимости от интересов ученика. Следовательно, и деятельность ученика разворачивается в реальном

пространстве, а значит, носит реальный, хоть и пробный, а не игровой характер, предполагает действительно ценный и употребимый результат — и требует для своего осуществления практически пригодных знаний, умений, способностей.

Оба аспекта «открытости» открытого дополнительного образования обеспечивают действительно насыщенный и заведомо применимый характер формируемых в нем знаний и способностей.

Безусловно, открытое образование, в том числе математическое, не может и не должно заменить собой существующие системы общего и дополнительного образования как институционально закреплённые источники базовых знаний и квалификаций, хотя бы потому, что, скорее всего, утратит при такой замене многие свои неповторимые выигрышные качества. Однако очень важно выделить из практик открытого образования те технологии, методы, приемы работы, которые могут быть успешно включены в деятельность образовательных организаций и учреждений, на основании которых возможно разрабатывать и проводить институционализированные состязания в рамках изучения математических дисциплин и адаптировать их для использования в этих условиях. Не менее важно выстроить взаимодействие и взаимовлияние между «стационарными» и «открытыми» образовательными формами так, чтобы знания, получаемые в одних, могли апробироваться и использоваться в других; так чтобы дефициты, выявленные и оформленные в одних типах деятельности, могли быть восполнены в других.

Эта книга не претендует на то, чтобы изложить целостный подход и способ адаптации технологий открытого образования к использованию в стационарных образовательных организациях, а также «готовые» принципы и механизмы взаимодействия между разными типами образования. Она описывает задачи современного компетентностного математического образования, призванного формировать математическое мышление; освещает основные формы открытого образования, позволяющие решать эти задачи; сжато описывает условия, при которых использование этих форм будет успешным. Но, на наш взгляд, это уже значительный шаг к интеграции возможностей открытого дополнительного образования в сфере математики в общеобразовательную практику, поскольку он показывает широкому кругу педагогов, методистов, управленцев горизонты и возможности своей профессиональной деятельности.

Полагаем, что в этом аспекте книга будет интересна и практически полезна как для преподавателей, разработчиков образовательных программ, управленческих работников разных уровней,

так и для студентов — не только будущих педагогов, но и тех, кто обучается по специальностям, связанным с математикой как таковой и с ее практическим, в том числе инженерным, применением.

*Александр Асмолов*



## **Введение**

$\pi = 3,141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\ 383\ 279\ 502\ 884$   
197 169 399 375 105 820 974 944 592 307 816 406 286  
208 998 628 034 825 342 117 067 982 148 086 513 282  
306 647 093 844 609 550 582 231 725 359 408 128 481  
117 450 284 102 701 938 521 105 559 644 622 948 954  
930 381 964 428 810 975 665 933 446 128 475 648 233  
786 783 165 271 201 909 145 648 566 923 460...

*Число  $\pi$  продолжается бесконечно, без единого повторения. А значит, внутри этой бесконечной цепи чисел содержится все остальные числа: дата Вашего рождения, код Вашего сейфа и номер страховки. Все они где-то там... И если преобразовать все эти цифры в буквы, то вы получите все существующие слова во всех возможных комбинациях. Все что мы говорим, говорили или собираемся сказать, находится в одном простом круге. А что делать с этой информацией? Зачем она вам? Это зависит от вас.*

Гарольд Финч, персонаж сериала «В поле зрения»

В настоящем методическом пособии описаны основные варианты (типы) содержательных оснований для конструирования практик математического образования, основные методико-методологические подходы к такому конструированию и соответствующие им педагогические технологии и приемы, а также описаны конкретные сложившиеся практики открытого образования, позволяющие успешно развивать математические способности у детей, подростков и старшеклассников. В пособии раскрываются причины того, почему подходы и конкретные методы организации освоения математического знания, свойственные именно открытому дополнительному образованию, оказываются одними из наиболее адекватных современным задачам предметной математической подготовки и обуславливают высокие учебно-образовательные результаты в данной предметной области. Сжато описываются те условия, при которых подготовленный педагог, в том числе работа-

ющий в сфере основного образования или «традиционного дополнительного» образования, сможет использовать отдельные методы или комплексные практики открытого математического образования в своей повседневной работе.

Важно дополнительно подчеркнуть, что основное внимание авторы предлагаемого пособия уделяют не любым «эффективным» или «новаторским» технологиям и приемам обучения математике применимым в школе или в муниципальном центре дополнительного образования. Точно так же главным предметом рассмотрения не является практика работы с математическим содержанием в рамках дополнительного образования, «параллельной» преподаванию математики в школах, в соответствии с общеобразовательными программами и учебными планами.

Безусловно, успешные технологии «основного» математического образования, регулярно обновляющиеся и пополняющиеся новыми разработками, нуждаются в специальной «инвентаризации» и систематизации. Точно так же специального научно-методического описания заслуживает опыт реализации разного рода «математических» образовательных программ в рамках дополнительного образования, анализ того, как они дополняют и усиливают общеобразовательные математические курсы, какие формируют компетенции, на какие технологии и методики опираются. В целом важно определить возможное разграничение «зон ответственности» за математическую подготовку детей разного возраста между основным общим и «традиционным» дополнительным образованием, реализуемым специализированными организациями данной сферы. Данные вопросы отчасти обсуждаются и в предлагаемом пособии.

Однако в центре внимания авторов пособия и, соответственно, заинтересованных читателей будут находиться практики работы с математическими способностями учеников именно в рамках открытого дополнительного образования. Эти практики, как уже было упомянуто выше и как будет подробно аргументировано ниже, во многом позволяют решать принципиальные задачи *развития* математических способностей их участников, в то время как практики математической подготовки в школах и в «традиционных» учреждениях математического образования, за исключением отдельных ярких, но не тиражируемых и не масштабируемых феноменов, «останавливаются» на предложении ученикам предметов и сюжетов для тренировки тех способностей, что уже сформировались «естественным путем».

Чтобы читатели могли лучше понять причины, почему именно открытое образование должно оказаться наиболее значимым для решения задач современного математического образования детей, подростков и старшеклассников, необходимо уже во введении обозначить его основные характеристики.

Открытое образование сформировалось во многом как естественный ответ образовательной практики на следующие изменения («вызовы») социальной и социокультурной жизни:

- усложнение и расширение сферы человеческого знания и спектра практик (каждый более или менее любознательный человек ощущает и осознает всевозрастающее усложнение и специализацию знаний, нарастающий объем информации, скорость ее обновления, уже не позволяющую ни по одному вопросу, от конкретных технологий и даже до фундаментальных научных принципов, получить исчерпывающий объем знаний «раз и навсегда»);
- изменение основных источников и способов получения знаний и способностей («квалификационных характеристик»): самообразование или образование из частных, негосударственных и при этом качественных источников с необходимостью начинает превышать по своей доле и месту в образовательной активности конкретного человека то образование, которое получается в рамках «основной образовательной программы» и программ организаций дополнительного образования; более того, все больше знаний и даже компетенций приобретает не в ходе прямого взаимодействия с педагогом того или иного типа, а за счет изучения интерактивно организованных обучающих материалов, размещенных в сети Интернет;
- изменение условий осуществления основных, даже самых «традиционных» видов человеческой деятельности — интернационализация производства, виртуализация управления производственными процессами, переход от функционально-инструктивного к проектно-целевому способам организации трудовой деятельности; говоря проще, современная организация производства и обмена приводит к необходимости «разукрупнения» промышленных гигантов и ставки на небольшие, мобильные, быстро приспосабливающиеся к переменам производственные объединения или даже на отдельных производителей, каждый из которых должен уметь действовать самостоятельно и при этом удерживать общий, объемлющий контур употребления

произведенной им продукции либо объемлющий проектный замысел; и даже в рамках сохранившихся «производственных гигантов» все большую роль играют проектные группы, в том числе временные, решающие конкретные задачи и обеспечивающие получение конкретного («здесь и сейчас») необходимого продукта. Соответственно, специалист — не только инженер, но и обычный рабочий — все чаще и все в большей степени должен действовать не по инструкции и раз и навсегда усвоенному алгоритму, а в соответствии с планом и способом деятельности, сконструированным самостоятельно.

Чтобы соответствовать этим требованиям изменившейся социальной и социокультурной действительности, образование должно приобрести следующие характеристики:

- «учить учиться», то есть формировать умения и навыки самостоятельно получать знания, а также осваивать либо самостоятельно конструировать способы деятельности (прежде всего, в режиме выполнения учебных проектов, в которых не предзаданы условия достижения поставленной цели);
- реализовываться не в обособленном от жизни пространстве образовательного учреждения (образовательной организации), а либо в пространстве реальной продуктивной деятельности (исследовательском институте, производственном предприятии, и т. д.), либо «между» такими пространствами, в сотрудничестве с соответствующими структурами и с использованием их ресурсов, либо в пространстве, моделирующем различные сферы деятельности и отношения между ними (например, в интерактории или в интенсивной школе);
- опираться не столько на «базовый учебный план», сколько на индивидуальные образовательные стратегии и траектории ученика;
- обеспечивать ученику максимальный спектр возможностей получения необходимых знаний и тренировки своих способностей: в Интернете, за счет стажировок в иных учреждениях и организациях, за счет индивидуальных занятий с педагогами, независимо от места их работы и даже места проживания;
- при конструировании и реализации образовательных программ основное внимание уделяется не столько учебному плану и его тематическому наполнению и методическому обеспечению, сколько целенаправленному созданию условий, при которых ученик, во-первых, сможет совершить самостоятельное результативное

действие в рамках той или иной практики; во-вторых, получить необходимую образовательную поддержку, которая позволит получить знания и сформировать/усилить компетенции, необходимые для выполнения заданного действия и, главное, получения необходимого деятельностного опыта; в-третьих, будет иметь возможность превратить свой субъективно переживаемый опыт в присвоенную и воспроизводимую модель деятельности; учебный план становится здесь лишь компонентой в описанной системе условий. Соответственно, базовыми категориями становятся не «Цель урока», «Образовательный материал», «Методы изложения», а — «Образовательная задача», «Образовательное пространство» и другие рядоположенные.

Очевидно, что образовательная практика, организованная подобным образом, имеющая своим основанием специально организуемую деятельность участника в особом, также целенаправленно организованном событийном и знаково-символическом пространстве, не может реализовываться в стандартных формах учебного курса и образовательной программы. Основными специфическими формами открытого дополнительного образования на сегодняшний день являются:

- *интенсивный образовательный модуль* («интенсивная школа»), в том числе целостная содержательно-логически выстроенная программа, состоящая из таких модулей, как из базовых единиц;
- *элективный курс*, основанный на собственной проектно-продуктивной деятельности слушателей или на дискуссионных обсуждениях предметных содержательных тематик, в котором педагог выполняет преимущественно функции педагогического сопровождения (наставнические и тьюторские);
- *детско-взрослое деятельностное* (исследовательское, инженерно-техническое, социально-проектное, пробно-профессиональное) *объединение*, основной функцией которого является социально, организационно, содержательно обеспечивать пробные действия учеников и оформление их результатов в качестве новых знаний и компетенций;
- *детско-взрослый клуб*, обеспечивающий обсуждение вопросов и предметного материала, соответствующих содержательным интересам участников либо обеспечивающий совместное конструирование индивидуальных познавательных и деятельност-

ных интересов и соответствующих им индивидуальных образовательных программ и траекторий;

- *индивидуальная образовательная программа*, сопровождаемая тьютором в соответствии с заранее выстроенным планом подобного сопровождения (в том числе сопровождаемая дистанционно);
- *учебный детско-взрослый проект*, не привязанный к каким-либо содержательно-управленческим единицам;
- *поисковые квесты* различной направленности (познавательные, компетентностные, мотивационные);
- *образовательные экскурсии и путешествия*;
- *открытые познавательно-деятельностные образовательные пространства и среды* (преимущественно виртуальные, цифровые), позволяющие самостоятельно или в группе, в том числе в сопровождении педагога-тьютора, получать необходимые знания и реализовывать самостоятельные субъектные действия (в основном в режиме моделирования, но с воспроизведением основных способов действий и паттернов поведения).

Образование, организованное подобным образом, на сегодняшний день «обречено» оставаться в статусе «дополнительного». Это обусловлено тем, что основное образование, в силу его фактически преобладающей функции социального обеспечения, должно быть строго нормировано как в плане познавательных и компетентностных результатов, которые будут достигнуты учениками, так и, прежде всего, по «исходно проверяемым» показателям — предметному содержанию, строго распределенному по учебным занятиям, методам, соответствующим не только каждой содержательной тематике, но и каждому конкретному занятию, и т. д. Образование, в котором основой и базовым фактором является *законченный акт деятельности* ученика, заведомо должно нормироваться иным способом, который на сегодняшний день полноценно не разработан и не институционализирован (это касается как России, так и зарубежных стран). Следовательно, подобная деятельность не может относиться к основному образованию как к форме обеспечения одной из ключевых социальных потребностей населения. Но точно так же она должна каким-либо образом отличаться от «традиционного» дополнительного образования, которое организовано согласно тем же нормам и принципам, что «основное», и отличается от него преимущественно базовым предметным содержанием, которое не признано как общеобязательное и поэтому принято и закреплено как «предмет индивидуального выбора». Главнейшее

отличие описываемых нами практик от «традиционного» дополнительного образования состоит в том, что они предполагают в качестве результата формирование определенного «комплекта» установок, знаний, компетенций, соответствующих интересам и устремлениям конкретного школьника, а следовательно, не подлежащего предварительной оценке и нормированию, в то время как «традиционное» дополнительное образование предполагает в качестве результатов прохождения определенных содержательно-методических процедур приобретение и закрепление школьникам заведомо обозначенных единиц знаний, способностей, опыта.

Поэтому и был введен термин «открытое образование»: поскольку, описываемые им формы образования не предполагают единообразно заданного и описываемого образовательного результата, поскольку основные образовательные процессы происходят в различных пространствах и даже не всегда могут быть предусмотрены изначально разработанной и принятой образовательной программой (отсюда определение «открытое», «открытость») — и поскольку подобные образовательные формы в их комплексе не могут лечь в основу образовательных программ основной школы, ввиду указанной выше заведомой вариативности результатов. Это, однако, не означает, что на каком-либо следующем этапе развития образования как институционализированной практики, выполняющей одну из ключевых функций общественного воспроизводства, подход и практики, описываемые сегодня в рамках «открытого образования», не смогут стать основой основного общего образования. Уже сегодня «открытое образование» в рамках большинства его проектов и практик позиционирует себя не как «дополнение» к образовательным программам основной школы, а напротив, как образовательный процесс, базовый для ряда школьников, в соответствии с их интересами и притязаниями, лишь использующий «основное» образование как управленческую опору и источник получения школьниками базовых предметных знаний о мире, которые затем можно будет использовать в рамках открытого дополнительного образования как базис, одновременно углубляя, оформляя, уточняя.

Необходимо, однако, отметить, что в течение длительного времени «открытое образование» реализовывалось в большинстве своих проектов и практик как межпредметное или надпредметное. Его базовые сюжеты предполагали включение участников образовательных проектов в *практики*, заведомо использующие данные нескольких различных предметных областей, или вообще форми-

рование у них конкретных компетенций и установок, востребованных в рамках широкого спектра видов деятельности. Освоение предметного знания в рамках открытого дополнительного образования традиционно рассматривалось как чисто инструментальная, служебная функция, сводящаяся в целом к корректировке и усилению тех чисто познавательных результатов, которые обеспечивало основное общее образование. Однако в последнее время новые задачи организации предметного обучения, связанные с описанными выше новыми социокультурными явлениями, активно востребуют методы и технологии открытого дополнительного образования. С другой стороны, по мере усложнения работы с личными основаниями и индивидуальными образовательными траекториями и программами в рамках открытого образования предметное образование «перерастает» служебную функцию и приобретает самостоятельное значение в качестве приобретения учениками оснований для самоопределения и собственных пробных проектов и практик. (Уже сегодня в этом качестве разработаны и реализуются предметно-компетентностные программы открытого дополнительного образования по ряду предметов — физике, истории, географии и, в частности, по математике.) На стыке этих двух потребностей — исходящей из объективной «внешней» потребности сферы предметного образования и связанной с внутренней логикой реализации практик открытого образования — и формируется практика подготовки по конкретным учебным предметам, обеспечиваемой полностью средствами и технологиями, присущими «открытому образовательному подходу».

При этом, разумеется, данная практика отличается от инварианта преподавания учебных предметов в общеобразовательной школе не только конкретными методами, но, прежде всего, основным предметом деятельности. Общеобразовательные предметные программы обеспечивают наилучшую по скорости, точности, системности, функциональности передачу определенного, заранее сформированного набора предметных знаний, относительно которых предполагалась либо очевидность их дальнейшего использования учениками для формирования своих жизненных представлений и установок, либо полное личное усмотрение обучающихся относительно использования данных знаний, то предметные программы открытого дополнительного образования обеспечивают, прежде всего, способности к получению, систематизации и практическому применению знаний по тому или иному учебному предмету.



Подход к организации математической подготовки детей, подростков и старшеклассников с точки зрения открытого образования позволяет по крайней мере отчасти разрешить вопрос, ключевой для математического образования не только в нашей стране, — по какому принципу, в соответствии с какими содержательными требованиями и в каком объеме отбирать учебный материал?

Этот вопрос является более острым, чем может показаться. Математическое образование само по себе, в силу характера лежащего в его основе предметного знания, оказывается проблематично в большей степени, чем любое другое предметно-организованное образование.

Подавляющее большинство других предметов естественно-научного, социально-экономического, гуманитарного циклов:

- либо имеет предельно прикладное, операциональное значение (прежде всего, родной и иностранные языки — обеспечивают грамотность и точность коммуникации);
- либо сообщают знания, необходимые для понимания окружающей действительности, правильных реакций на ее проявления, способность использовать объективную природную или социально-экономическую реальность в своих интересах (физика, химия, биология, география — несмотря на зачастую крайне неоперациональный, громоздкий характер отбора материала и его преподавания, в целом обеспечивают получение верных и точных знаний о физических и химических явлениях окружающей действительности, о законах природы, об устройстве мира и характеристиках разных континентов и стран, в которые, возможно, случится приехать или иметь дело с их представителями);
- либо обеспечивают формирование или оформление у взрослого человека социальной и культурной идентичности, необходимой для успешного включения в процессы социально-экономической активности (история, обществознание, литература).

На фоне иных предметных познавательных дисциплин математика заведомо выделяется, поскольку, с одной стороны, ее необходимость как предмета любого учебного плана кажется очевидной на интуитивном уровне, а с другой стороны, остается совершенно не очевидным, какие именно разделы математики, в каких именно формах, с какими содержательными акцентами и на каком уровне сложности имеет смысл преподавать.

С одной стороны, математика имеет столь же прикладной характер, как и изучение языков. Однако «прикладные», необходимые для жизни «каждого человека» компоненты математической науки могут быть освоены за 2–3 года и, казалось бы, не требуют изучения на протяжении 11 лет школьного обучения и одновременно в учреждениях дополнительного образования. В целом же смысл изучения математики — в том объеме, в каком оно происходит в рамках современных практик основного общего образования — в формировании мышления в различных его аспектах (не случайно постоянное цитирование фразы Ломоносова о математике, которая «ум в порядок приводит»), в целом в освоении учениками способов и подходов к работе с идеальными формами. Но одновременно математическая наука, по крайней мере в ее современном виде и изложении, доступном для массового восприятия, не предназначена напрямую для уяснения людьми идеальных закономерностей и моделей окружающего мира — она, даже в ее теоретических разделах, фиксирует объективные закономерности окружающего мира для того, чтобы на основе построенной модели оказалось возможно выстроить практику, зачастую имеющую узко-специальный характер и назначение, мало понятное как детям и подросткам, так и старшеклассникам.

Соответственно, отбор предметного материала для преподавания математики сталкивается, по крайней мере, со следующими проблемами:

- По какому принципу отбирать разделы, позволяющие сформировать у подопечных практически значимые паттерны, установки, механизмы мышления — и как определить, какие из разделов математики наилучшим и наиболее возрастено-адекватным способом позволят сформировать эти качества?
- Какие разделы математики могут оказаться для учеников источниками практически используемых инструментов мышления и прямых инструментальных действий (вплоть до конкретных вычислений)?
- Каким образом могут (и могут ли?) специализированные разделы современной математики, позволяющие смоделировать и исчислить очень особые устройства или процессы, далекие от актуальности среднестатистического школьника стать основанием для формирования значимых представлений о соотношениях и возможностях наличной действительности?

- Возможно, самый главный вопрос — каким способом и посредством каких сюжетов и ситуаций школьники должны знакомиться с теми или иными предлагаемыми им для изучения математическими принципами и закономерностями; какие конкретные методики должны здесь использоваться и в каком порядке комбинироваться?

Метафорически можно сказать: проблема математического образования состоит в том, что оно состоит из двух нераздельных и несоединимых компонент — математики и образования — или, говоря точнее, математического содержания и образовательных технологий, обеспечивающих освоение этого содержания учениками.

Суть противоречия заключается в следующем. Математика, при всем ее значении для повседневной прикладной деятельности, прежде всего фиксирует, описывает и объясняет *объективные* закономерности и соотношения, от присущих очень определенным аспектам и сферам действительности до инвариантных, общих для всего физического мира, как природного, так и антропогенного. Соответственно, во-первых, материал математики как науки остается неизменно верным в любых условиях, лишь дополняясь новыми познанными и зафиксированными соотношениями и закономерностями, легшими в основу новых математических знаний и новых методов математического постижения действительности; во-вторых, математика как система отдельных наук и направлений изучения целостна, и выделение конкретных тематик и аспектов, предназначенных для изучения, всегда будет носить в известной мере искусственный характер. Образование же представляет собой социально обусловленные институт и практику (вернее, систему практик), в которых предмет и содержание не могут не изменяться, притом в зависимости от воли и возможности *многих* одновременно действующих и взаимодействующих субъектов — и, как правило, в связи очень прикладных, сиюминутных интересов каждого из этих субъектов. В случае с математическим образованием величественная система объективных описаний фундаментальных закономерностей и соотношений, фактически онтологическая модель устройства действительности и каждой конкретной ее сферы, должна стать материалом и инструментом для решения очень конкретных и зачастую частных гуманитарных задач, притом обозначаемых разными субъектами и поэтому нередко вступающих в противоречие друг с другом.

Это фундаментальное противоречие и делает неизбежными те вопросы отбора математического содержания для образовательных

программ, которые были обозначены выше; схожие и взаимосвязанные с ними вопросы могут быть поставлены и относительно предпочтительных форм и методов математического образования. Данные вопросы фактически могут быть сведены к следующим простым и общепонятным:

- **Что** именно должны изучать ученики в рамках предметных курсов в общеобразовательной школе (как на уровне конкретных разделов математических наук, соответствующих определенным соотношениям и закономерностям реальной действительности, так и на уровне методов математического структурирования и моделирования этой действительности)?
- **Почему** необходимо, чтобы дети, подростки или старшеклассники освоили именно данные разделы математического знания и методы математической «работы с действительностью», в частности — каким образом и в каких ситуациях они *в своей возрастной ситуации* будут использовать эти знания в собственной жизнедеятельности в течение жизни?
- **Как**, за счет какого способа организации образовательного процесса, каких конкретных образовательных технологий, методов и приемов, удастся сделать так, чтобы ученики освоили и присвоили необходимые разделы математической науки и методов математической работы с окружающей действительностью?

Комбинация ответов на эти вопросы приводит к формированию позиций для уже более сложных, специализированных дискуссий. Например, на тему, должно ли математическое образование быть «консервативным», то есть связанным с максимально точным освоением определенного заданного круга принципиальных знаний и способов познания как с самостоятельной ценностью, точнее, как с инструментом дисциплинирования мышления и его структурирования за счет освоения сложного и притом отстраненного от человека материала? Или, напротив, математическое образование должно носить прогрессивный, деятельностный характер, и разделы математического знания должны осваиваться в процессе решения учениками задач, от игровых, имеющих смысл в специально заданном «сказочном» контексте, как в практике развивающего обучения для первого класса, до практически значимых? Должно ли математическое образование в общеобразовательных организациях сперва, в течение начальной школы, формировать способности и навыки, позволяющие ученикам совершать несложные подсчеты в повседневной жизни, а потом сделаться способом

выявления и отбора детей, которых можно признать «объективно математически одаренными» (для остальных сложные разделы математики должны быть оставлены предметом оторопи и непонимания, для чего они были нужны)? Или математическое образование должно фактически быть одним из условий массовой подготовки квалифицированных рабочих и инженеров, создавая необходимый познавательный и мировоззренческий базис, в том числе на уровне установок и способов мышления, на основе которого, без затрат лишнего времени, было бы можно быстро и качественно формировать собственно инженерные знания и компетенции? Или все же математическое образование должно быть массовой компетентностной практикой, притом в нескольких базовых вариациях, от «средневекового» «заучивания мудрости» как особой и, надо сказать, нередко эффективной техники становления ряда компетентностей и даже пробуждения познавательного интереса — до сложного выстроенного комплекса технологий, опирающегося на выверенные представления о том, как освоение и реализация тех или иных способов математического действия или отношения к действительности связана с формированием или усилением той или иной базовой, общей компетенции ученика? Должны ли школьные курсы по математическим предметам строиться единообразно, закономерно ориентируясь на самый простой уровень понимания и представлений и, следовательно, упрощая исходный материал так, что его в конечном итоге оказывается сложно соотнести с теми мировоззренческими, познавательными, практическими задачами, ради которых эти математические представления и познавательные приемы формировались и разрабатывались. А если не упрощать, то стоит ли разрабатывать «уровневую» модель преподавания математики, и, самое главное, по какому базовому основанию выделять данные уровни? Наконец, должна ли математика преподаваться как «один из» предметов базового учебного плана, рядоположенный другим по способу позиционирования для учеников, подходам и методам подачи, типу предполагаемого использования в жизни — в строго определенных практиках или относительно строго определенных объектов познания в окружающем мире? Или все-таки она должна занимать в учебном плане особое место, именно как онтологическая и одновременно инвариантно-инструментальная дисциплина, «проницающая» все остальные и соотносящая с их потребностями собственный подбор учебного материала и распределение его по учебному плану; предполагающая проведение общих занятий по математическим дисциплинам и по тем дисциплинам, для

которых математика является необходимым аппаратом для обозначения, структурирования, интерпретации полученных знаний?

Без ответов на все эти вопросы невозможно определить вещи, ключевые для определения оснований образовательной деятельности и успешного управления образовательным процессом: что считать образовательными достижениями (в том числе с внутренними градациями по уровню качества), каковы предполагаемые ситуации использования этих достижений и, соответственно, какие образовательные практики объективно, в силу своей структуры и организации, смогут обеспечить данные результаты и за счет этого быть признаны успешными.

Уже на уровне «житейского здравого смысла» очевидно, что математика как дисциплина именно *онтологическая*, описывающая всеобщие связи и закономерности, не может на уровне примитивной дихотомии делиться на отдельную и самодостаточную науку, с одной стороны, и инвариантный аппарат для получения, оформления структурирования, обобщения, интерпретации новых знаний, используемый всем спектром наук, в том числе гуманитарных, — с другой. Иными словами, в рамках математических наук деление на чистое, «сугубо математическое» знание и на «инструментальное» знание, используемое в других науках и в практиках, может быть только чисто спекулятивными. Даже фундаментальные теоретические разделы математики, которые в обыденной речи часто именуется «чистой» математикой, все равно описывают действительные и возможные соотношения и процессы, имеющие место в реальной действительности — физической, химической, биологической и т. д. — которая описывается специализированными дисциплинами, посвященными тому, а не иному типу материи и ее движения. С другой стороны, «инструментальные» разделы математики представляют собой преимущественно выводы из фундаментальных и не могут быть использованы в познавательной или преобразовательной практики без тех особенностей структурирования и обобщенного представления знания, которые свойственны «чистой» математике. Однозначное (тем более жестко бинарное) деление здесь является объективно вредным как для качества получаемого знания, так и для формирования у взрослеющего человека объемлющей междисциплинарной картины мира. Ведь она должна предполагать не просто сосуществования, но и необходимую взаимосвязь, «растяжку» между прикладным и «отвлеченным», «объективным», «фундаментальным знанием» как между конкретными способами и инструментами деятельности, с одной стороны,

и законами мироздания, задающими одновременно пространство, рамку, условия и императив для этой деятельности — с другой.

В последние десятилетия в разных странах формировались различные подходы к преподаванию математики и соответствующие им модели, претендовавшие на позиционирование ее одновременно как предмета и инструмента деятельности, и за счет этого — на снятие хотя бы некоторых противоречий, обозначенных выше.

Например, один такой подход исходит из представления о математических дисциплинах в их системной совокупности как об универсальном или универсализируемом языке. Его часто обозначает и продвигает Нил Деграсс Тайсон — американский астрофизик и популяризатор науки, директор планетария Хейдена. Подобный подход позволяет одновременно отчетливо понять, что объектом математического знания является фактически совокупная окружающая действительность, изучаемая различными специализированными науками; освоить математику как методологию, как способ оформления, точного описания и верификации; одновременно — подойти к ней как к самостоятельному интеллектуальному конструкту, подобно тому, как любой язык является средством описания, атрибутирования, структурирования реальности, но не тождественен ей. Такой подход позволяет ученикам четко и весьма точно увидеть ситуации и предметы употребления математического знания в других областях знания и в системах профессионально-практической деятельности.

Однако определяя значимость и практическую применимость «языкового» подхода к позиционированию математики для учеников и к организации ее освоения, стоит заметить, что любой язык, даже если брать основной предмет аналогии — знаковую систему вербальной коммуникации между людьми — может изучаться по-разному. Например, в практике большинства учреждений основного общего образования изучение языка строится по строго научным правилам. Язык осваивается учениками как объект и предмет, а не как инструмент деятельности, тем более не как инструмент решения коммуникативных задач, возникающих «здесь и сейчас» (это, к сожалению, хорошо видно по базовым учебным планам изучения родного и иностранных языков). Рассматривается комплекс правил и законов, описывающих структуру и принципы функционирования языка; ученик погружается в массив таблиц, схем и процедуры отвлеченно-«научного» анализа языковых конструкций (морфемного, морфологического и многих других разновидностей). Однако основным образовательным результатом такого

предложение плохо согласованно, просьба переформулировать, например: «и инструмента деятельности, направленного на...»

подхода, к сожалению, становится в основном желание и готовность ученика выбрать профессию лингвиста (ученого, эксперта, и т. д.), но не способность освоить язык как нормированный конвенционный способ выражения собственных мыслей и отношений, как инструмент коммуникации. *Вообще, правомерно утверждать, что тот или иной язык как знаково-символическая система, обеспечивающая описание и оформление действительности, а также коммуникацию по ее поводу, необходимо не изучать (или учить) как кодифицированную систему представлений о действительности, а осваивать как средство деятельности.* То же самое неизбежно будет касаться и математики, если позиционировать ее преподавание как преподавание языка. В одном случае она останется объектом, внешним по отношению к взрослому человеку и в общем-то ему безразличным, свойства которого необходимо выделить, обобщить и запомнить; и делать это будет труднее, чем в случае с другими учебными дисциплинами, ввиду того, что сам этот объект обобщает свойства других объектов и их соотношения между собой, а следовательно, сам по себе является предельно абстрактным. В другом случае необходимо будет *освоить* математику как *способ деятельности* относительно неких внешних объектов и в соответствии с обозначенными предметами данной деятельности. И здесь мы снова оказываемся вынуждены вернуться к вопросам о том, в каком качестве и в контексте какого потенциального контура употребления математические дисциплины должны преподноситься ученикам разного возраста, а соответственно, какой конкретный материал, методы и технологии педагогической деятельности должны подбираться.

Другой интересный подход, формально снимающий ряд вопросов и дихотомий в преподавании математических дисциплин, состоит в интерпретации математики как *онтологии*, описывающей основные закономерности и соотношения мира как комплексной, надпредметной, межпредметной, метапредметной реальности, которую «по кусочкам» описывают различные предметные дисциплины и которая при этом в качестве пространства и системы условий нашей деятельности остается всегда и заведомо целостной, вследствие чего требует для организации успешного действия в ней знаний и представлений особого, «целостного» типа, которые и обеспечиваются математическими дисциплинами. Именно *онтологический* подход к изучению и преподаванию математики ярче, точнее и убедительнее, чем другие, проводит представление о математике как о всеобщем значимом метапредметном, «все пронизыва-



ющем» знании, позволяющем описать и объяснить любое явление действительности. Примечательно и забавно, что именно в рамках данного подхода некоторые авторы выстраивают логически убедительное доказательство того, что математика является гуманитарной дисциплиной. Ведь, во-первых, она описывает основные соотношения и процессы окружающего мира *с точки зрения человека*, обобщающего и выделяющего инвариантную модель, а не с точки зрения самих по себе, вне-человеческих процессов, происходящих в материи. Во-вторых, математика, понимаемая и используемая онтологически, служит *человеческим* нуждам, связанным с познанием мира и организацией продуктивной деятельности в нем. И в самом деле, *число* как явление, отдельное от обозначаемых им объемов какого бы то ни было вещества или скольких бы то ни было объектов, было сконструировано человеком для описания и структурирования действительности в соответствии со своими нуждами и своим пониманием этой действительности. То же можно сказать про любую формулу, аксиому, теорему, про любую выстроенную с их помощью математическую модель: она описывает действительность за счет знаковых конструкций, созданных людьми в связи с собственными интересами, а не на основе естественно данных, «природных» прототипов.

С точки зрения строгого различия между собой, данное рассуждение, безусловно, остается весьма спорным. Но, однако, оно подчеркивает комплексный характер математики как научно-познавательной дисциплины, показывает проблематичность ее восприятия как «самодостаточной» науки, имеющей собственный объект изучения, рядоположенный объектам других наук, указывает на ее объемлющий, над-предметный характер и, самое главное, парадоксальное сочетание в ее структуре абсолютных истин, фиксирующих неизменные свойства и соотношения мира, с интересами человеческого познания и деятельности, формирующимися и реализующимися «здесь и сейчас».

Достоинства онтологического подхода к математике как к объективно существующей научной дисциплине и к конкретным практикам ее преподавания очевидны. Условно они могут быть сведены к уже упоминавшейся «связке» между фундаментальной и прикладной (вернее в этом контексте — «деятельностной») ипостасями математической науки. Из этой связки приистекают и возможность максимально точно и системно обозначить различные системы и связности действительности как подлинный предмет математической науки; возможность для ученика понять матема-

тику как практику и получить опыт ее реализации применительно к конкретным задачам различного типа и масштаба. Однако нужно отметить еще одно принципиальное достоинство онтологического подхода к математическим дисциплинам, в данном случае прежде всего как к материалу, объекту и предмету педагогической деятельности. Это возможность не просто оформить и представить вонне свойства окружающей действительности, прямо или косвенно данные в ощущениях, но, прежде всего, осуществить переход от прямого, непосредственного восприятия окружающего пространства — сперва к восприятию этого пространства не как чего-то случайного и фрагментарного, а как закономерной и системно устроенной целостности, притом по своему масштабу заведомо выходящей за пределы, в которых конкретный человек может освоить ее эмпирически; затем — к восприятию его как целостности, которая может изменяться в соответствии как с объективно существующими, познаваемыми и описываемыми процессами, так и со специально выстроенными действиями людей, опирающимися на те же самые общие соотношения и закономерности, описываемые математикой, которые обуславливают «естественные процессы развития». История математики, во всяком случае в античной Греции, показывает, что математика сформировалась как отдельная научная дисциплина в отличии от совокупности технологий и прикладных навыков, каковой она была в Междуречье и Египте, именно как *инструментальный способ выхода человеческого мышления за границы эмпирического знания, как способ обосновать и доказать правомочность того или иного представления/действия, заведомо не даваемого в прямых ощущениях*. Общеизвестна история о том, как греческий философ и естествоиспытатель Фалес посетил современный ему Египет, собрал сведения о том, как жрецы и чиновники фараона производят землеустроительные работы после разлива Нила, чисто эмпирически, опытно, соотнося между собой поля различной формы, так, чтобы выделить каждому крестьянину одинаковый участок для посева, — и на этом основании вывел универсальные геометрические законы соотношения площадей различных фигур, позволявшие распределять землю уже не «вручную», а за счет заранее установленных правил проведения межей. Еще один пример перехода от натурального действия к необходимости построения «идеальной» и притом объективной мысленной модели необходимого объекта — история подхода Демокрита к открытию атома

открытие не совсем подходящие здесь слово, скорее о речь идет о представлении

как неделимого элемента<sup>1)</sup>. Но если в античную эпоху переход от натуральных и поэтому частных представлений к общезначимым моделям действительности имел значение для очень малой части людей, даже представителей элит, то в наше время предельного усложнения самой «обыкновенной» производственной деятельности, взрывообразного расширения возможностей «простого» человека (но, соответственно, и актуальных для него рисков), огромных массивов информации, в которых совсем не просто отделить истину от частичной истины и от лжи, не говоря уже про предельное расширение и усложнение объектов и предметов изучения науки, от элементарных частиц до Вселенной, взятой в ее целостности, и процессов, обусловленных и обуславливающих эту целостность, способность выстраивать мысленные модели для объектов и явлений, не подлежащих чисто эмпирическому познанию, измерению, оценке, становится общезначимой компетенцией.

Хотя бы на бытовом уровне — невозможность эмпирически, «в ощущениях», определить устройство таких неотъемлемых элементов нынешней повседневности, как микроволновая печь, персональный компьютер, смартфон, либо делает человека заложником сервисных служб — в случае малейшей неполадки, либо требует способности представить процессы, за счет которых все эти устройства выполняют свои полезные функции, в виде мысленной модели. И уж совсем критичной способность строить мысленные математические модели становится при столкновении с кредитными операциями, поскольку процент как таковой является сугубо идеальной сущностью, оборачивающейся, однако, при легкомысленном отношении потерями, данными неисправному должнику во вполне физических ощущениях.

Однако если принять онтологический подход к изучению и к преподаванию математических дисциплин в качестве главного и основного, придется столкнуться с рядом дидактических, методических, организационно-управленческих задач, которые пока что затруднительно решить как в рамках общеобразовательного учреждения, так и в рамках конкретных, «отдельно взятых» учреждений и организаций дополнительного образования. Эти задачи в основ-

---

<sup>1)</sup> В рамках данной истории рассказывается о том, как Демокрит непрерывно разрезал некий предмет, деля его части пополам. Когда уже было невозможно разрезать наименьшую часть, то Демокрит задался вопросом о том, до какой все-таки степени можно осуществлять конечное, уже невидимое человеческому глазу деление. Так посредством мысленного эксперимента Демокрит предположил существование неделимого, фундаментального элемента — атома.

ном могут быть сведены к необходимости дать ответы на следующие два вопроса, притом ответы управленческие и деятельностные:

- Как содержательно, методически, управленчески «пронизать» математикой большинство других учебных предметов (не на уровне использования конкретных формул, как это делается сейчас при преподавании физики, химии, некоторых разделов биологии, а на уровне выстраивания математических моделей тех реалий, которые объясняются и описываются данными предметами)? Как в этом случае должна быть организована работа педагога с чисто математическим содержанием — и как должны измениться содержание и методы работы педагогов-предметников, работающих с дисциплинами, которые «пронизает» математика? Как должно строиться взаимодействие между педагогами, и не только на уровне планирования деятельности, но и на уровне непосредственного партнерования при совместном проведении занятий — а такое совместное проведение при последовательном проведении в жизнь онтологического подхода к изучению математики окажется заведомо необходимым? (Заметим, что именно совместное, одновременное, сопоставленное и целенаправленное образовательное действие двух и более педагогов в большинстве практик современного основного общего образования является практически не реализуемой задачей, в такой степени, что даже «открытый урок» является для среднестатистического учителя значимым событием и часто источником стресса. Объясняется это, в частности, одним из исходных принципов классно-урочной системы — центрирующей ролью учителя в образовательном процессе, сформулированном еще Я. А. Коменским: «Учитель — солнце посреди класса» — а ведь двух Солнц в системе планет быть не может!)
- В каких ситуациях — заведомо над- и метапредметных, притом деятельностных по своему характеру — ученики смогут реализовать свои математические знания и представления как инструменты работы с собственными онтологическими представлениями, если учесть, что предметом такой работы должна стать персональная картина мира, проецирующаяся в равной степени на явления «вселенского» масштаба и на частные случаи, в том числе на бытовые ситуации, а объектом — система взаимосвязей между процессами и явлениями наличной действительности? Очевидно, что в рамках никакой отдельной предметной дисциплины, в том числе и алгебры, начал анализа, геометрии,

пронизывает?

такой процесс осуществить практически невозможно. Необходимы специальные межпредметные пространства образовательной деятельности — клубы, кружки, лаборатории, институционализированные учебные проекты — и сюжеты деятельности в них, которые бы *требовали* от учеников сопрягать различные предметные сферы для анализа объемлющих процессов и явлений, вычленяемых из действительности, и проводить этот анализ методами и средствами математики и математического моделирования. На сегодняшний день все эти формы, за исключением сравнительно не массовых специализированных классов в общеобразовательных учреждениях, являются формами сугубо дополнительного, факультативного образования и не охватывают заметной части учеников — а в рамках онтологического подхода к преподаванию математики именно они должны стать основными, взамен нынешним урокам по конкретным учебным предметам. Очевидно, что если такое изменение будет проведено в жизнь, то радикально изменится сама конструкция образовательного процесса и в содержательном, и в методическом, и в управленческом смысле.

Справедливости ради, нужно отметить, что те же самые вопросы и задачи ждут педагогов и управленцев, которые решат организовывать преподавание математики как «универсального языка» в практико-ориентированном режиме, в режиме «освоения». Ведь для освоения точно так же потребуются *применять* данный язык к объектам его описания, взятым как по отдельности, в рамках обособленных предметов, так и в системной связности, не «вмещающейся» в предметно-организованный урок по самому назначению этого урока как закреплённой образовательной формы.

Внимательный читатель уже сам может предположить, что обозначенные вопросы и задачи, проблематичные для решения в рамках основного общего образования и институционализированного дополнительного образования, по крайней мере на сегодняшний день, вполне могут быть решены за счет тех моделей и способов деятельности, а также конкретных образовательных форматов, которые были кратко охарактеризованы при описании открытого дополнительного образования. Именно открытое образовательное пространство, как было упомянуто выше, не просто позволяет взрослому человеку с определенным стартовым познавательным багажом и способами действия, а также с определенной установкой «пройти» через различные образовательные пространства, связанные с различной предметностью и способами деятельности,

а совершить в них действия, связанные с соотношением и синтезом различных предметных сфер и способов деятельности (в ряде случаев, открытое образовательное пространство специально создается для того, чтобы он совершил именно такое движение). Следовательно, здесь применение математического знания как языка и как инструмента моделирования последовательно к нескольким учебным дисциплинам оказывается вполне возможным. Точно так же возможным и даже необходимым в системе открытого дополнительного образования является наличие не просто одновременно нескольких педагогов во время занятия, а педагогов, представляющих различные предметные сферы и занимающих разные позиции. Наконец, действительным предметом любой программы открытого дополнительного образования, независимо от конкретной темы и материала, является формирование способности успешно действовать в рамках решения какого-либо класса задач, ситуаций или способов организации практики. Следовательно, формирование, оформление, функционализация этих образовательных результатов с необходимостью должны происходить в пространстве реальной деятельности, натуральном или специально смоделированном, которое по определению является меж- над- и в известной мере мета-предметным, следовательно вполне может быть объектом математического моделирования именно в «онтологическом» подходе к математике. Хотя никакое пространство деятельности, доступное для учеников, смоделированное или, тем более, реальное, разумеется, не охватывает всей мировой целостности (строго говоря, никакое пространство даже «взрослой» деятельности ее не может и не должно охватывать, если это не деятельность ученого-теоретика или философа), это пространство заведомо является естественно-сложившимся, системно-организованным, органически развивающимся сегментом мировой целостности. Следовательно, уже оно может предоставить ученикам возможность выявить существенные *системные* свойства окружающего мира, быть адекватным и образовательно-продуктивным объектом и предметом онтологического моделирования средствами математики. Кроме того, большинству людей способность работать с «онтологическими» задачами и соответствующими ими объектами необходима не в масштабе мироздания, а именно в масштабе их собственной сферы деятельности, ее системы связей, присущего ей пространства процессов и отношений, которые необходимо представить во всей полноте смысла и содержания, включая неявные связи и компоненты. Так что адекватные объект и предмет образовательной деятельности

взрослеющих людей в рамках освоения математики в «онтологическом» подходе также вполне обеспечиваются открытым дополнительным образованием.

\* \* \*

Предлагаемые рекомендации не содержат в себе инструкции относительно того, как выстроить какую-либо целостную систему открытого дополнительного образования в сфере математики — хотя бы потому, что такая система в целом проблематична, именно ввиду «открытого» характера данного типа образовательных практик. Никакой содержательный и, тем более, управленческий контур не может стать конечным и будет расширен при появлении новых потребностей и побуждений учеников, а значит, новых, соответствующих им образовательных стратегий и конкретных форм и методов их реализации, новых педагогических подходов и технологий, как ориентирующихся на явные потребности школьников, так и основанных на моделировании *объективных*, не осознаваемых еще самими школьниками интересов и потребностей.

*Предлагаемые рекомендации освещают следующие вопросы:*

- Каковы общие принципы формирования и развития математических способностей (в том числе, в чем состоит принципиальное различие между *математической способностью* и *математическим знанием*)?
- Каково соотношение между данными принципами и конкретными педагогическими подходами, способами, методами или комбинациями таковых, позволяющими успешно сформировать математические способности?
- Каково назначение математических способностей в различных культурно-психологических возрастах и каковы возрастне-адекватные технологии и методы их формирования?
- Каковы основные существующие подходы к формированию математических способностей детей, подростков и старшеклассников, каково их соотношение с задачами, способами, формами реализации открытого образования, каковы возможности сочетания и взаимоусиления данных подходов в пространстве реализации открытого дополнительного образования?
- Каковы назначение, структура, условия реализации, спектр возможных результатов для основных форм открытого образования, способных обеспечить успешное формирование математических способностей?

- Что стоит учитывать и на что стоит ориентироваться педагогам, решившим использовать элементы форм, способов и методов формирования математических способностей в открытом образовании в рамках собственной практики?

Отдельно в предлагаемых рекомендациях рассмотрены следующие вопросы:

1. Возможности, ресурсы, ограничения основных существующих практик дополнительного образования (как открытого, так и «традиционного», реализуемого строго в рамках конкретных учебных форм, предусмотренных учебным планом, на базе конкретных образовательных учреждений и организаций), направленных на развитие математических способностей детей, подростков, старшеклассников. Анализ данных вопросов был проведен на основе материалов, представленных субъектами Российской Федерации в рамках деятельности Федерального института развития образования. Результаты анализа изложены в приложении А к данным рекомендациям.

2. Основные проблемные точки в рамках существующих практик дополнительного образования, в том числе отчасти подходящие под определение «открытое дополнительное образование», например состязательные форматы и практики, в частности:

- односторонний характер подготовки к олимпиадным состязаниям, связанный с т. н. «натаскиванием на решение задач», то есть с последовательным, методично организованным прорешиванием больших массивов олимпиадных задач, что позволяет сформировать устойчивые *навыки*, но не только не обеспечивает освоение *способа* решения как рефлексивно организованного типа действия, но формирует подсознательный барьер по отношению к одному из главных результатов математического образования, описанному выше — переходу от натурального действия, в том числе связанного с решением конкретных задач, к модели, обеспечивающей быстрое и беспроblemное решение всех и любых задач определенного *типа*; кроме того, подобный подход обуславливает закрытый характер результатов олимпиадного движения, которые участники фактически могут конвертировать лишь в высокие возможности поступления в престижные вузы, но не в организацию собственных практик, которые смогут обеспечить их автору как высокие образовательные результаты, так и первые деятельностные достижения в процессе обучения;



- односторонняя ориентация практик дополнительного математического образования на поступление лучших учеников в вузы как, фактически, на единственную стратегию и единственный формализуемый результат, не предполагая никаких иных путей и стратегий, в том числе осуществимых одновременно с поступлением и обучением в вузе; эта ориентация реализуется как в рамках олимпиадного движения, так и в подготовке к сдаче ЕГЭ по математике, которая, без преувеличения, стала основным направлением услуг на рынке негосударственного дополнительного образования;
- преобладающая роль педагога в ряде практик деятельностного (в том числе открытого) дополнительного образования, фактически замещающая реальные образовательные инициативы учеников, в том числе за счет приписывания им тех или иных интересов и потребностей;
- реализация под видом открытого дополнительного образования заранее выстроенного и однозначно (без вариантов) реализуемого образовательного маршрута, деятельностно организованного и создающего у подопечного иллюзию принятия самостоятельных решений и самостоятельного конструирования деятельности, но фактически являющегося серией ситуаций, полностью выстроенных педагогом и обеспечивающих гарантированные единообразные результаты деятельности учеников и соответственно их единообразные и гарантированные рефлексивные выводы из своего деятельностного опыта (иначе говоря, те или иные тематики исследований, проектные решения и инженерные прототипы изначально придумываются и проектируются педагогами, а дети уже включаются в движение по заранее придуманному сценарию).

Источником и основанием большинства описанных проблемных точек, на наш взгляд, являются излишняя ориентация и «центрация» на обеспечении трансляции и выполнения учениками некой нормы, в том числе в ситуациях, когда нормирование происходит на основе логики и законов организации практики, а не внешних социальных тенденций и обстоятельств. При том что сфера дополнительного образования должна быть пространством личностного развития и инициативы, а формирование нормативных установок должно обеспечивать общее образование, привычки и способы работы, сформированные этим последним, подсознательно реализуются разработчиками и педагогами в других образовательных сферах, в том числе в тех проектах и практиках, которые могут

быть по формальным признакам отнесены к открытому дополнительному образованию. Представление о педагоге как о «трансляторе», «надзирателе», «том, кто знает, как правильно» продолжает действовать даже в изменившейся социокультурной ситуации, прежде всего за счет бессознательно реализуемых паттернов, но также и за счет ряда символических опор и социально-институциональных условий.

Другая первопричина указанных выше проблемных точек связана с устоявшимся, методически и институционально закрепленным феноменом «конкурсной математики», вернее, образовательных конкурсов математической тематики и направленности, рассчитанных на учащихся общеобразовательной школы. Основные характеристики этого феномена уже были описаны выше. Большинство существующих математических конкурсов образовательного характера культивируют познание ради повышения статуса, носящего во многом условный, даже можно сказать, игровой характер. Этот статус при определенных условиях может конвертироваться в успешное поступление в «желанный» вуз (но отнюдь не всегда и не для всех). Но в большинстве случаев он остается лишь фактором самоуважения для взрослеющего человека и его родителей и не играет преобладающей роли даже в его профессионально-деятельностном самоопределении, которое либо совершается до включения в олимпиадное движение и помимо его факторов, либо фактически не совершается. Компетентностные результаты участия в олимпиадном движении оказываются либо случайными, либо являются заведомо служебными относительно того базового компетентностного ядра, которое складывается у человека в связи с его реальным самоопределением, состоявшимся, как было сказано выше, безотносительно олимпиад. Сами по себе олимпиадные результаты совсем не означают способности учеников практически применять продемонстрированные познания даже в познавательной деятельности, не говоря уже о научно-исследовательской или профессионально-практической. И даже те навыки, которые с необходимостью формируются за счет продолжительного участия в олимпиадном движении (прежде всего, «навык быстрого анализа ситуации» и «навык быстрого принятия решения»), зачастую оказываются не способствующим, а препятствующим фактором даже для становления ученым-математиком, поскольку в их практике важно не столько быстрое нахождение наиболее очевидного решения, сколько тщательная проработка условий, формирование аппарата, выстраивание последовательности действий для получе-

ния решения не очевидного, но истинного. Безусловно, формат олимпиадных состязаний не только не формирует соответствующие паттерны и способы организации деятельности, а прямо им противоречит, в отличие, например, от деятельности научных обществ учащихся.

В предлагаемых рекомендациях данные дефициты подробно анализируются, после чего предлагаются версии их минимизации и преодоления.

Авторы рекомендаций далеки от того, чтобы предлагать огульно заменить существующие формы общего и «традиционного» дополнительного образования, в том числе связанного с конкурсно-состязательной деятельностью, технологическими решениями, сложившимися в рамках открытого дополнительного образования. Они, скорее, обозначают задачи математического образования, *действительно* актуального в современной социокультурной ситуации как для отдельных учеников, так и для государства и общества, после чего показывают, какие подходы и конкретные формы наилучшим образом позволяют решить данные задачи. Конкретные задачи методических разработок и, тем более, проекты конкретных содержательно-управленческих мер заведомо остаются за рамками данных рекомендаций. В целом же авторы стоят на позиции конвергенции устоявшихся форм основного и дополнительного математического образования с подходами, способами и методами, присущими открытому образованию: введения в состав олимпиадных заданий задач открытого деятельностного характера, решение которых заведомо связано с получением и оформлением компетентностных результатов; построения ряда учебных курсов по модульному принципу или в форме деятельностного квеста и т. д.

Авторы надеются, что предложенные рекомендации позволят, прежде всего конкретным педагогам, управленцам или же педагогическо-управленческим командам, проанализировать собственную практику математического образования, соотнести ее с действительными задачами данного направления в образовании, оценить эффективность ранее использованных форм и методов работы, освоить новые подходы, принципы, технологии и методы организации математического образования, в конечном итоге — выстроить последовательную программу обновления собственной образовательной практики.

## Глава 1

# **Развитие математических способностей: общие принципы**

*Рассматриваются: специфика математической деятельности; общее понятие способности в отношении к деятельности и ее содержанию; схема развития способностей в применении к математической деятельности, на основе культурно-исторического понимания процесса развития как последовательного формирования культурных способностей в рамках общей возрастной периодизации развития.*

## **1. Математика как наука и содержание образования**

### **Парадокс математического знания**

Начиная с периода оформления математического знания как *особенного*, не сводимого ни к каким другим типам знания, и *особенной* математической деятельности, имеющей дело с очень специальными *математическими* объектами, математика содержала в себе явный парадокс.

Этот парадокс коснулся не только философского понимания математики, но и специфики математики как профессии, преподавания математики (как общекультурного достояния и как профессионального знания) и понимания того, что делает человека способным или не способным как к профессии, так к пониманию и способности применения соответствующего знания.

С одной стороны, математическое знание представляло собой наиболее обобщенный вариант знания о встречающихся в практике *объективно существующих* пространственных формах, о величинах и их выражении с помощью чисел. Пространственная форма материальна, поскольку является формой некоторого материального тела. Число материально, поскольку является результатом измерения характеристик материальных тел или их соотношений.

Отсюда появилось «материалистическое» понимание математики, в наиболее четкой форме сформулированное Ф. Энгельсом<sup>1)</sup> и не утратившее актуальности, поскольку в разных вариациях оно воспроизводится как в учебных, так и в научно-популярных и энциклопедических изданиях.

Но именно такое понимание оказалось не в состоянии объяснить, почему математика описывает не только саму по себе объективную действительность, но и сконструированные человеческим разумом машины — как объективную действительность<sup>2)</sup>, более того, позволяет конструировать новые машины<sup>3)</sup>. И даже конструировать машины, существование которых не вытекает ни из каких природных законов<sup>4)</sup>. В том, что эти машины материальны, сомневаться сложно. Но сложно и сомневаться, что замысел этих машин возникает сперва в мышлении инженера на основе математических конструкций, а уже затем воплощается в материале.

С другой стороны, еще в тот исторический период, когда математика выделилась как особый род знаний<sup>5)</sup>, возникло представление о математических сущностях (числах и фигурах) как об особом мире. В этом мире существуют идеальные отношения пропорции и гармонии, он требует особой духовной концентрации для своего изучения, а знания об этих идеальных отношениях «божественны» по своей природе, но могут быть использованы для совершенствования реального мира.

---

<sup>1)</sup> «Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира» [37].

<sup>2)</sup> Теория тепловых машин Карно, развившаяся в термодинамику, и теория электромагнитной индукции, развившаяся в радиосвязь и генераторы электричества.

<sup>3)</sup> Если термодинамика позволяла рассчитывать оптимальные конструкции тепловых машин, то на основе частных решений уравнений электродинамики конструировались устройства, развившиеся впоследствии в радиотехнику со своей математической теорией.

<sup>4)</sup> Вычислительные машины могут быть реализованы на базе механики (механические арифмометры), на базе электромеханических устройств (машина Бэббиджа, машины Холлерита, первые ЭВМ) и на базе радиотехнических устройств (вся современная вычислительная техника, опирающаяся на схему транзистора). Однако логика управления такими системами, их программирования не зависит от физической элементной базы.

<sup>5)</sup> Это связано, в первую очередь, с освоением античной культурой геометрии как культурного достояния более древних цивилизаций, в первую очередь — цивилизации Египта. Специфика этого освоения была связана с тем, что *практическое* знание об измерении земельных участков было отделено от исходной практики и освоено как знание о фигурах, существующих *в изображении* [3, 11].

В первую очередь такое понимание было характерно для пифагорейской школы, равно преуспевшей как в построении первых универсальных математических конструкций<sup>6)</sup>, так и в первых применениях математики вне практик измерения и счета, в построении теории музыки и даже определении групп налогоплательщиков.

В последующей традиции математика развивалась как род интеллектуальных упражнений, задающих меру образованности человека, его способности к отвлеченным размышлениям и рассуждениям, и как способ постижения всеобщих законов, посредством которых Космос представлен в уме Создателя.

Первый аспект подробно рассмотрен Платоном в диалоге «Теэтет» [24], где обсуждается идеальный характер объекта математического размышления, и отчасти в диалоге «Государство» [25]. Здесь математика представляет собой комплекс упражнений в способности свободного созерцания, не обусловленного никакими текущими житейскими интересами, и в этом смысле — как пропедевтика любого научного и философского мышления. Более того, позиция, обозначенная Платоном, состоит в том, что без серьезного освоения математики невозможно изучение ни философии, ни практики управления.

Второй аспект — система описания *математически прозрачной* конструкции мира, составленной из идеальных сущностей, разворачивается в диалоге «Тимей» [26], по многим оценкам, восходящим к пифагорейской традиции и задавшим вектор развития античной геометрии и развития математики (и математической физики) в целом<sup>7)</sup>.

Первая попытка синтеза этих подходов исторически связывается с именем Архимеда. Именно он одновременно использовал математику для точного описания природных законов (вычисление плотности тела через соотношение с плотностью воды того же объема), для конструирования механизмов (винт, системы блоков)

---

<sup>6)</sup> «Фигурные» числа и исследованные с опорой на геометрическое представление свойства чисел как таковых (например, отношения делимости) [36].

<sup>7)</sup> Так, первое систематическое изложение математики Евклидом, задавшее образец аксиоматической теории, конечной целью имело исчерпывающее описание *совершенных тел* (правильных многогранников), определяющих стихии, из которых состоит объективный мир [20]. Анализируя принципы мышления математической физики, один из крупнейших физиков-теоретиков XX века В. Гейзенберг отмечает, что *фундаментальные симметрии*, лежащие в основе современной научной картины мира, существенно ближе к *совершенным телам* Платона, чем к каким-либо пространственным телам и величинам, обнаруживаемым в действительности [5].

и решал задачи, приведшие впоследствии к появлению исчисления бесконечно малых (например, оценка числа  $\pi$  и выражение через это число объемов тел вращения).

Но впоследствии эти подходы разделились на прикладную, *инженерную* математику (впервые получившую развитие в эпоху Возрождения в связи с новыми задачами архитектурного проектирования) и математику *академическую*, воспроизводившую схему аксиоматической теории.

В первом подходе математика представляла собой *исчисление*, набор формальных правил преобразования форм и величин (а затем и высказываний о формах и величинах — алгебраических формул) в их применении к классам практических задач. Во втором — *рассуждение*, позволявшее уточнять существующие утверждения и обнаруживать новые, в том числе путем свободного мысленного конструирования новых объектов и исследования их законов<sup>8)</sup>, принципиально исходящее из идеального характера объектов, заданных аксиомами и правилами построения.

*Ниже мы увидим, как это противоречие отразилось (а во многом, по инерции, и сейчас отражается) на подходах к математическому образованию.*

### Математика как деятельность

Проект конструктивного синтеза, *снимающего* это противоречие, был предложен И. Кантом<sup>9)</sup>. Основа этого синтеза — представление любого знания как результата *деятельности* (формирующей действительный мир как мир деятельности человека, а не как мир *воздействий* на человека каких-либо внешних сущностей<sup>10)</sup>), и *рефлексии*, обнаружения законов самой деятельности в ее столкновении с объективным миром.

Так, количество и порядок в предложенном представлении — это количество и порядок единичных актов *обнаружения* предметов

---

<sup>8)</sup> Так, были обнаружены и исследованы *конические сечения* (эллипсы, параболы, гиперболы) и схемы приближения *бесконечно малых величин*, для поздней античности представлявшие собой вершину изощренности математического ума — и лишь в Новое Время оказавшиеся актуальными для задач теоретической и прикладной механики, того, что стало началом математической физики.

<sup>9)</sup> Прежде всего, в «Пролегоменах...» [12], в разделах «Как возможна чистая математика» и «Как возможно чистое естествознание».

<sup>10)</sup> Применительно к математике — независимо от того, являются ли эти сущности характеристиками природных объектов или сущностями из внешнего по отношению к деятельности *идеального* мира.

счета, в более развитой форме — *измерения*, где значимая величина (длина, ширина, масса и так далее) выделяется в деятельности, а не является характеристикой самого объекта. Точно так же форма есть результат *оформления*, выделения значимого объекта в пространстве.

Выделенные в рефлексии законы построения меры и формы могут рассматриваться как отправная точка для построения всей сложной системы математического знания.

В предложенном подходе *необъяснимая эффективность математики в познании законов природы* и *эффективность применения математики в изобретениях человеческого ума* равно являются следствием того, что деятельность, сталкиваясь с миром явлений, оформляет этот мир по собственным разумным законам. Сами эти разумные законы не появляются откуда-то извне, а представляют собой структурные принципы организации самой деятельности.

В развитой форме этот подход к анализу математического знания (и, как следствие, к построению математического образования) был осуществлен в XX веке, с опорой как на обширный исторический материал, так и на материал современной математики, ее научных и инженерных приложений.

Прежде всего, в качестве основной единицы математического мышления была выделена *задача* [27]. Именно решая задачи, математик применяет разумные законы, априорные схемы мышления к предметам, встречающимся в практической деятельности, может структурировать эти предметы и свести их закономерности в итоге к формам и величинам постольку, поскольку они уже вовлечены в человеческую деятельность.

Исходно любая задача представлена как практическая *ситуация*, в которой возникает неразрешимая трудность. Эта трудность выявляется, с одной стороны, как невозможность совершить эффективное действие; с другой стороны — как отсутствие знания о том, как действие может быть совершено<sup>11)</sup>.

В структуре ситуации должны быть выделены существенные характеристики деятельности и ее предмета, построена *модель*, пред-

---

<sup>11)</sup> В исторически первых математических задачах, например, возникала необходимость восстановить поле, которое при известных технологиях обработки и известной урожайности дает *то же количество зерна*, что и предыдущее, границы которого были смыты разливом реки. Необходимо было связать количество зерна с пространственными характеристиками поля (строго говоря, связать его площадь с формой и размером) [31].



ставляющая эту структуру в знаковой, зримой форме, в виде отношений известного и неизвестного.

Уже известные законы форм и величин позволяют сформулировать это отношение в виде *математической модели*, при необходимости — на основе известных законов вывести новые, характеризующие именно эту математическую модель (или именно этот класс моделей)<sup>12)</sup>. Зная законы, можно вывести неизвестные величины и формы из известных; при частом употреблении сходных моделей нужные рассуждения могут быть сведены в единую систему со своими правилами, которые могут быть формализованы до *исчисления*. В идеале таким исчислением должен мочь воспользоваться и дилетант, не понимающий происхождения правил и сущности тех объектов, к которым эти правила применяются, но достаточно освоивший приемы формальных рассуждений, чтобы на основе исходных данных получить необходимый результат.

*Наиболее распространенной формой такого исчисления является арифметика. Даже неграмотный человек, как показывает практика, при необходимости может выполнить элементарный финансовый расчет, опосредствованный знаковой формой монет и купюр, формальными правилами суммирования и вычитания.*

Интересно отметить: профессиональные математики (и преподаватели математики), увлекаясь работой с формальной стороной математической модели, часто не обращают внимания на то, что результат должен быть еще *интерпретирован*, отнесен к практической ситуации и использован для эффективного достижения результата.

Отсюда во многом сложившаяся вокруг математики репутация ее как деятельности, отвлеченной от жизни, и существующее внутри профессионального сообщества разделение на *чистых* и *прикладных* математиков — если первых интересуют, прежде всего, законы построения и преобразования математических моделей, вторые ориентированы на практический результат, ради него часто готовы пренебречь «чистотой», строгостью рассуждений.

Здесь важно остановиться на том, что для математического образования важен не только и не столько сам факт *решения задачи*, сколько момент возникновения, постановки и формулирования задачи. Источник задачи в математическом образовании молодых людей очень часто остается упущенным. Мы сразу выводим учени-

---

<sup>12)</sup> Обращаясь к упомянутому примеру — на основе известных отношений для полей прямоугольной формы найти отношения для полей в форме треугольников и трапеций.

ков на уровень исчислений, ошибочно предполагая, что им нет дела до источников возникновения самой задачи. Тем самым мы исключаем возможность *совершения учеником полноценного мыслительного действия*, позволяя начать путь мысли с середины, предоставляя возможность совершить *лишь мыслительную операцию*. Данная ситуация исключает начала пути мышления как такового.

Во введении мы уже обращались к задаче как важному элементу в математическом образовании. Можно полагать, что понятие задачи вообще является центральным в математическом образовании, в частности дополнительном. С одной стороны, задача является «ядерным» фактором удержания внимания и процессов возможной мыследеятельности ученика. Но с другой стороны — в образовательных практиках (и не только в образовательных) часто путается понятия задачи и задания. С точки зрения, уместной для рассматриваемых нами контекстов, задачу можно понимать, как нечто интериоризированное, присвоенное и понятое как личностно (или профессионально) значимое из практики<sup>13)</sup>. В свою очередь, задание не может иметь такого потенциала по определению. Задание дают, и его по тем или иным причинам необходимо выполнить. Также в задании известно то, что оно имеет решение. Задача лишь имеет гипотезу о том, что она решаемая, но сам способ решения ученику не известен — его необходимо вывести. Также можно выделить характеристику, связанную с тем, что задание требует решения на «быстром забеге», в свою очередь задача предусматривает долгой разработки своего решения. В этом смысле она предусматривает элемент *авторского действия*. Данный момент принципиально важен для практик дополнительного математического образования.

Стоит заметить, что задачный подход к организации образовательного процесса в целом свойствен именно практикам открытого дополнительного образования. Логика данных практик предполагает, что ученик должен не получать знания в режиме трансляции, а сам «вынимать» их из учителя, открытых источников, собственного опыта и его специально организованной аналитики и рефлексии. А процесс этого «вынимания» и может быть инициирован и затем закреплен и обеспечен не столько за счет прямого вмешательства и воздействия педагога, сколько за счет постановки им для учеников *задачи*, которая бы, во-первых, интриговала и мотивировала найти решение; во-вторых, задавала жесткие граничные условия

---

<sup>13)</sup> А мы рассматриваем математику как самостоятельную практику.

решения; в-третьих, указывала на возможные средства и способы решения. Задача, решаемая учениками в рамках практик открытого дополнительного образования, может носить как чисто предметный характер, так и, что чаще, предметно-практический, а следовательно, предполагать не только определить *точное* решение в рамках конвенционально определенной системы знаний, но, прежде всего, найти *оптимальное* решение в рамках той деятельностной ситуации, которая была задана в исходном условии.

Однако при тождестве названий *задача*, используемая в качестве основного *инструмента* в рамках открытого дополнительного образования, зачастую оказывается принципиально отличной от *задачи* как *базовой дидактической единицы* в рамках основного общего образования. И здесь важно принципиально различить образовательную и учебную задачи.

В отличие от учебной задачи, образовательная не требует «решения» в традиционном смысле слова, то есть привлечения имеющихся в наличии знаний и способов решения. Для образовательной задачи также недостаточно выработки новых знаний и способов. Прежде всего, образовательная задача связана с построением онтологического контура, в котором могут разворачиваться процессы конструирования и интерпретации. Так, например, для учеников образовательная задача — это реальная задача поиска организации форм собственного будущего и построения собственной биографии; для педагогов — реальная задача организации исследовательско-конструкторской деятельности. То есть проблема в образовательной задаче должна быть обращена к внутреннему миру ученика, становится важной лично для него, переживаться и присваиваться.

Образовательная задача отражает в своем содержании какую-либо реально существующую проблему, которая требует практического решения и делает проблему не просто фактом, а ситуацией, которая переживается как значимая для жизни ученика.

Проблемная ситуация, которая становится основанием для коллективной деятельности и которая, собственно, актуализирует всю ситуацию, должна иметь смысл — реальное значение в историческом, социокультурном пространствах. Однако при этом она должна быть не «производственной», учебной или игровой, а имеющей статус реальности для участников, включенных в образовательное событие. Иными словами, образовательная задача должна носить практический характер, предоставлять возможности овладения практическим мышлением.

## 2. Математика как предмет образования

### Основания для выделения подходов

Исходя из особенностей понимания математики в разных философских и, как следствие, дидактических традициях, сложилось несколько разных подходов к математическому образованию; их типологию можно строить по двум основаниям.

#### 1. Содержательное и формальное.

В первом случае математика разворачивается как практика созерцания и исследования сложных объектов, часто идеальных по своей природе<sup>14)</sup>, не имеющих отношения к действительности, но в любом случае позволяющих выстроить вокруг себя собственную действительность, в том числе действительность эстетическую (как, например, правильные тела [20] и фракталы [9]).

Во втором случае математика предстает как система преобразований сложных последовательностей символов, подчиненных определенным правилам. Эти правила также имеют свою эстетическую составляющую (так, математики и физики-теоретики часто говорят об особой «красоте формул»), но сама необходимость работать со сложными высказываниями без понимания их предмета задает определенный *порог входа*. На практике именно по возможности ученика преодолеть этот порог учителя судят о *способности* или *неспособности* к математике.

#### 2. Эмпирическое и теоретическое.

В первом случае математические объекты представляют собой формальные обобщения тех объектов, с которыми ребенок сталкивается в жизненной практике. Так, круг обобщает колесо, Луну и обруч; прямоугольник — лист бумаги, окно, экран телевизора или компьютера; число «два» — две ноги, пару ботинок, повторение действия. Этот подход весьма популярен в дошкольном и младшем школьном обучении; поскольку ребенок в этом возрасте еще не умеет различать искусственное и естественное, он может не задумываться о том, что круги в природе встречаются достаточно редко, а прямоугольники не встречаются вовсе.

Во втором же случае математические объекты строятся как конструкции человеческого разума и результаты специально организованного действия. Так, круг есть результат применения циркуля, или другого инструмента, выполняющего ту же функцию (например, вращательного движения кисти руки), число появляется при

<sup>14)</sup> Эта особенность математики, напомним, была отмечена еще Платоном [24].

подсчете повторений одного и того же действия или события, в том числе число как результат многократного приложения меры к измеряемой величине.

Отметим, что если формальное определение объекта позволяет лишь *идентифицировать* его, то содержательное, конструктивное определение позволяет его построить при заданных условиях.

Из этих двух оснований можно выстроить типологию реальных подходов в образовании, по-разному интерпретирующих содержание и смысл математики.

### **2.1. Содержательно-эмпирический (популярный) подход**

Как уже отмечено, используется по преимуществу при первоначальном знакомстве ребенка с математическими объектами и понятиями. Наиболее развит в дидактике системы Монтессори, где многократно воспроизводятся ситуации знакомства ребенка со специально сконструированными объектами, воплощающими идеи *порядка, количества, равновесия* — те идеи, которые нужны современному человеку в повседневной практике.

При всей продуктивности этого подхода, его органичности и эстетической привлекательности, его ограничением можно считать именно то, что ребенок не воспринимает отношения — и те конструкции, в которых эти отношения материализованы, — как искусственные. Как следствие — инженерно и экономически (с использованием математических понятий) выстроенная среда с большой вероятностью не будет восприниматься как то, что однажды сконструировано — и может быть подвергнуто критике и сконструировано заново, в отличие, например, от Луны.

Какой-либо порог входа здесь вообще отсутствует, но с большой вероятностью это означает, что ученик не будет готов совершить дальнейший переход к более сложным формам математического знания, для которых не существует наглядных интерпретаций. Особенную сложность, как показывает многочисленная практика, именно у людей с развитым содержательно-эмпирическим мышлением вызывают те математические и прикладные модели, где ясные из жизни понятия употребляются как метафора (например, «квадрат», «лошадиная сила», «работа»).

В рамках открытого дополнительного образования данный подход может применяться для «разминки», особенно в практиках, рассчитанных на дошкольный или младший школьный возраст. Эта «разминка» должна предполагать, прежде всего, получение опыта

решения задач, требующих деятельностного решения «здесь и сейчас», поставленных по своей форме предельно прикладным и технологичным образом, как в реальном, так и в специально сконструированном контексте (например, помочь сказочному герою решить задачу, требующую измерения или соотнесения величин, притом в ситуации заведомо исключающей возможность использования сложного математического аппарата). Но и в этом случае продуктивно либо на этапе рефлексии процесса решения, либо еще раньше, на «втором шаге» решения, перейти от данного подхода к иным, предполагающим *исчисление* или даже *моделирование* в возрастно сообразных формах.

## 2.2. Формально-эмпирический подход

Очень хорошо работает при освоении детьми нумерации и счета — от номеров домов до расчета цен. Позволяет взрослеющему человеку освоиться с различными формальными системами, начиная с арифметики и заканчивая правилами использования сложных технических устройств, каждое из которых, от автомобиля и системы организации дорожного движения до персонального компьютера, для своего управления требует освоить некоторое *исчисление*.

Именно в этом подходе порог входа обозначается способностью освоить определенное исчисление и принять его как систему правил, помогающих в практической деятельности. С одной стороны, в процессе образования это приводит к определенным психологическим трудностям, в частности, к появлению феномена *неуспешного ученика* — но, с другой стороны, может гарантировать однозначные критерии освоения формальных систем. Как мы увидим ниже, общераспространенное понимание математической одаренности связано с легкостью преодоления именно такого порога.

Поскольку освоение формальной системы достаточно легко проверить, этот подход используется в массовой системе оценки образовательных результатов.

В то же время преобладание этого подхода в массовом преподавании математики приводит к тому, что сложная конструкция математической задачи редуцируется к освоению системы формальных преобразований математических моделей. А рекордный уровень математических способностей сводится к виртуозному владению аппаратом формальных преобразований<sup>15)</sup>.

---

<sup>15)</sup> Возможно, именно поэтому как в системе государственных экзаменов, так и в системе математических олимпиад статистически заметно преобладают задания

В практиках открытого дополнительного образования данный подход стоит использовать в чисто инструментальном контексте, как один из конкретных частных методов, необходимых для решения комплексной содержательной задачи. Однако в ряде случаев при выстраивании индивидуальной образовательной траектории ученика в рамках изучения математических дисциплин продуктивно ряд частных практико-ориентированных задач, позиционированных при этом для ученика как самоценные и самодостаточные, выстроить именно как задачи исчисления, в которых именно нахождение правильного численного решения станет фактором разрешения значимой коллизии. За счет этого одновременно формируется или усиливается способность к исчислению как необходимое условие решения сложных математических задач — и формируется/усиливается ряд паттернов, необходимых для успешной математической деятельности, прежде всего — установка на точность и численную определенность результата, установка на использование имеющихся инструментов исчисления и моделирования, способность их продуктивно комбинировать и т. д.

### 2.3. Формально-теоретический (академический) подход

Если формально-эмпирический подход представляет математику только как набор утверждений и процедур, связанных с преобразованием этих утверждений, то в академическом подходе принципиально важным является упражнение способности получения новых утверждений и обоснования утверждений уже существующих.

Точные исторические данные о применении этого подхода в ранней пифагорейской школе отсутствуют (хотя в истории науки сохранились легенды о том, что еще Фалес упражнялся в обосновании, в том числе утверждений достаточно очевидных). Но известно, что уже во времена Платона такая практика устоялась; математика как упражнение в обосновании и поиске новых отношений при анализе идеальных объектов рассматривалась как первый шаг при подготовке будущих философов и политиков. Именно в этом качестве, систематизированная на основе формальной логики как *аксиоматический метод*, математика стала содержанием первой науки в современном смысле — геометрии Эвклида.

---

на упрощение выражений, решение уравнений с использованием нетривиальных особенностей уравнений и функций разных видов. Аналогично в системе олимпиад по информатике преобладают задачи кодирования — вместо задач, требующих создания модели ситуации и ее математической формализации, и задач, требующих исследовать свойства модели.

просьба  
 проверить  
 цитату, в  
 оригинале  
 вроде бы  
 «Нет царский  
 путей к  
 геометрии»,  
 что носит  
 несколько  
 иной смысл

Обозначенный аксиоматическим методом порог входа был декларирован самим Эвклидом: *в геометрии царских путей нет*. Содержание этого порога связано уже не столько с владением формальными схемами, сколько с умением видеть неявные отношения в структуре идеальных объектов, соотносить их с уже известными знаниями и делать выводы об этих отношениях (составе фигур, пропорциях, неизвестных величинах) на основе как анализа единичного объекта, так и применения всеобщего знания, сформулированного в аксиомах и теоремах.

В такой деятельности воспроизводится значительная часть структуры математической задачи — с тем ограничением, что действительные практические ситуации уже заранее замещены идеальными математическими объектами и моделями<sup>16)</sup>. Кроме того, в академическом подходе новое знание появляется лишь как следствие любознательности и комбинаторного искусства, за счет конструирования новых, еще не исследованных идеальных объектов<sup>17)</sup>.

Кроме того, обобщенное теоретическое знание, представленное как *особенная ценность*, создает очевидный культурный разрыв между элитными сообществами, способными создавать или воссоздавать математическое знание, и сообществами, профессионально использующими математическое знание, представленное эмпирически.

В частности, ученик, не имеющий вкуса к выполнению формальных преобразований, оказывается неуспешным в изучении математики, а его успешный товарищ, в особенности у «сильных» учителей, тренируется решать задачи почти автоматически, не спрашивая, откуда и зачем они берутся — то есть не в состоянии *поставить задачу*<sup>18)</sup>.

Как и в случае с формально-эмпирическим подходом, данный подход стоит использовать сугубо инструментально — в контексте формирования и усиления у взрослеющего человека опреде-

<sup>16)</sup> Напомним, что математическая революция в естествознании [4, 8] началась именно с обращения внимания на возможную эффективность отвлеченной, академической математики в анализе прикладных задачах астрономии и инженерной механики.

<sup>17)</sup> Именно этот путь считается единственным достойным путем развития *чистой* математики.

<sup>18)</sup> В школьной и вузовской практике задача, как известно, берется из задачника. В реальной науке и инженерии — от лидера научной школы или главного конструктора. Вопрос, кто составляет задачки, для школьника и студента, как правило, остается за рамками мировоззрения. Тем более, в формально-теоретическом подходе не принято обсуждать, откуда берутся задачи в науке и технике.



ленных установок, ей и способностей. Но если задачи, выстроенные и решаемые в рамках формально-эмпирического подхода, имеют смысл и значение для усиления и закрепления ценностей *точности, верифицируемости, инструментальной адекватности* построений, *точности и полноты подбора инструментов*, то задачи, связанные с «академическим» подходом, в рамках целостной образовательной траектории формирует *культуру работу с основаниями (аксиомами), культуру владения нормой* (предполагающую, в частности, способность к преобразованию нормы на основании анализа новых обстоятельств и подтверждения их фундаментального характера), *культуру соотнесения частных результатов с всеобщей нормой*, которой отвечают как данные результаты, так и способ их получения. Для отдельных учеников важной частной задачей, реализуемой в режиме открытой деятельности, сопровождаемой наставником, может быть решение конкретной классической математической задачи либо доказательство теоремы, в том числе и прежде всего тех, что на сегодняшний день не имеют однозначного решения или доказательства (см. *решение теоремы Ферма учеником математического класса в сюжете одной из повестей Е. С. Велтистова об Электронике, написанного до признанного доказательства этой теоремы*). Однако важно помнить, что такое решение может быть лишь частью объемлющей образовательной траектории, в рамках которой оно выполняет роль, с одной стороны, доказательства его или ее «пригодности» к деятельности данного типа; с другой стороны, способа закрепления необходимых установок и способов мышления и практической деятельности.

#### 2.4. Содержательно-теоретический подход

Подход основан на интерпретации *задачи* не только как содержательной единицы математического знания, но и как дидактической единицы, позволяющей выстроить процесс освоения и понимания математики одновременно как знания о специфических идеальных объектах и формальных системах высказываний, так и способа появления и применения этого знания в практической деятельности.

В *чистой* математике, особенно в ее разделах, традиционно считающихся пограничными (теория вероятностей, теория дифференциальных уравнений, математическая логика, теоретическая информатика) на основе этого подхода произошел переход от исследования отдельных объектов к исследованию задач — условий

их разрешимости, методов оценки эффективности решения, конструирования частных алгоритмов и оценки их результатов.

В математическом образовании прорыв был связан с построением *теории учебной задачи* [7], позволяющей воспроизвести в «школьной» ситуации, даже на материале, доступном первоклассникам, всей цепочки перехода от практической трудности к построению математической модели, исследованию ее свойств и формированию математического формализма.

Несмотря на то, что наиболее завершенном виде этот подход реализован лишь в начальном обучении, существует ряд разработок (от программ дополнительного образования до учебников), в которых представлены вся цепочка движения по схеме задачи и исследование *задачи* как основного объекта математического мышления<sup>19)</sup>.

Данный подход в наибольшей степени соответствует задачам и логике открытого дополнительного образования, в том числе тех его проектам и программ, которые посвящены надпредметной и метапредметной деятельности. Выше уже было показано, что деятельность учеников, обеспечивающая появление у них необходимого опыта и далее оформление на его основе необходимых компетенций и инструментальных знаний, может быть успешно организована только за счет самостоятельного решения задач определенного содержания и, самое главное, построения, в том числе целевой установки, способа ее подачи, подбора ограничений и заданного круга возможностей. Выше обсуждалось различие между учебной и образовательной задачей. Однако практика показывает, что именно в ходе работы с математическим содержанием и материалом эти типы задач могут «смыкаться» — за счет того, что контур задачи, связанный с практико-ориентированными, личностными, «жизненно важными» вопросами, которые оказывается возможно решить за счет использования предметных знаний, сам по себе вполне может стать предметом математического моделирования как способа объективировать реальные процессы. В частности, взрослеющие люди могут, в том числе в ходе освоения конкретных разделов математических дисциплин, математически смоделировать личностные отношения, прежде всего, через процессы взаимодействий, необходимые для их обустройства; условия собственного карьерного роста в заданных условиях, включающих в себя значимые переменные факторы; перспективы развития тех территорий или сфер деятельности, с которыми они связывают

<sup>19)</sup> Из учебников для высшей школы можно отметить, например, [1].

реализацию своей личностной траектории. Более того, они могут математически смоделировать и обосновать свою возможную профессионально-жизненную траекторию как математиков — «фундаментальных» ученых, инженеров и т. д. В этом случае в рамках практик открытого дополнительного образования могут использоваться и учебные математические задачи, построенные в рамках содержательно-теоретического подхода, но предполагающие в качестве предмета решения и контекста, задающего условия задачи, не отвлеченные от ученика вопросы, интересные, скорее, с познавательной точки зрения (законы природы, инженерные решения, и т. п.), а вещи, заведомо имеющие для него большое личностное значение, например, уже перечисленные личностные траектории и степень вероятности их реализации.

Важно отметить, что содержательно-теоретический подход в преподавании математики фактически не может полностью и полноценно реализоваться в рамках общеобразовательного учреждения. Ведь сам режим «поурочных» занятий если и позволяет совершить переход от практического содержания к выявлению описывающих его математических закономерностей, то в «препарированном» режиме, когда само практическое содержание не выделяется учениками самостоятельно, в рамках некоей длительно решаемой задачи и длительно удерживаемого интереса, а предлагается педагогом в «готовом» и оформленном виде, то есть, фактически, как предметный материал (ведь и в основе любого предметного материала лежит либо практика, либо информация, ставшая результатом реализации некой практики). Чтобы ученики *самостоятельно* сумели выделить реальные события и явления, которые должны стать предметом математического моделирования и выявления закономерностей, весь учебно-образовательный процесс нужно организовать проектным образом. В этом случае основными единицами, чередующимися между собой, станут практикумы, слабо нормируемые по времени реализации, а также встречи с наставником, позволяющие оформить результаты, которые также не всегда имеет смысл жестко определять и обозначать в рамках учебного плана.

В этом смысле содержательно-теоретический подход к преподаванию математики не только *может* быть эффективной содержательно-методической основой для программ открытого дополнительного образования, а сам по себе может быть полноценно и до конца реализован лишь в рамках подобных программ.

### 3. Математическая способность и возможности ее развития

В эмпирическом понимании способность к математике (как и другие способности, связанные с освоением сложных формальных систем знания) рассматривается как сравнительная легкость преодоления учеником «порога вхождения»; в этом качестве как синоним рассматривается термин «одаренность».

Способный, или одаренный, ученик — прежде всего, тот, кто с легкостью осваивает новые предметные знания и быстрее выполняет новые задания [16]. В пределе такой ученик способен даже совершить новое личное открытие (повторяющие открытия, уже произошедшие в истории науки, но ученикам соответствующего возраста заведомо не известные).

Такие феномены зафиксированы в биографиях многих выдающихся математиков. Так, Карл-Фридрих Гаусс<sup>20)</sup>, будучи гимназистом второго класса, открыл закон суммирования арифметической прогрессии. Блез Паскаль в детстве самостоятельно доказал значительную часть теорем евклидовой геометрии. Софья Ковалевская изучила высшую математику по конспектам лекций, которыми из экономии ее отец велел обклеить детскую вместо обоев.

Понимание способности как того, что присуще ученику заранее, может быть подвергнуто критике уже формально-логически. Так, возникает вопрос, существовала ли особенная математическая способность до того, как математика сформировалась как отдельная область культуры. По мере развития математики и дифференциации математического знания (особенно с появлением информатики и компьютерного программирования) обнаруживается также разная степень легкости освоения разных разделов науки, особенная ориентация отдельных учеников на красивые конструкции, не имеющие отношения к практике, или на применение знаний при решении практических задач<sup>21)</sup>. Естественен вопрос — существовала ли

---

<sup>20)</sup> Эта история подробно проанализирована в психологической литературе, например в [2, 10].

<sup>21)</sup> Первый тип отношения отчетливо характерен для математиков, прославившихся математическими головоломками и поиском неочевидных закономерностей, например в узорах и в целом визуальных композициях (наиболее известный и доступный школьникам пример — золотое сечение). Второй характерен для ученых, склонных к конструированию и решению задач, пограничных для математики; такой тип отношения хорошо показан, например, в воспоминаниях нобелевского лауреата по физике Р. Фейнмана [35].

эта дифференциация заранее или она является следствием процессов развития и воспроизводства культуры.

В целом для современной психологии (в том числе тех исследований, которые легли в основание новых подходов в образовании) характерен отказ от таких эмпирических, натуральных представлений. Математическая способность рассматривается в ее *генезисе*, как результат последовательного освоения учеником все более сложных форм мышления и деятельности. Признано так же, что способность *являет себя* не столько в работе с готовым знанием, сколько в процессе решения задач.

Рассмотрим математическую способность как деятельностьную характеристику человека, опираясь на структуру задачи, как учебной, так и образовательной<sup>22)</sup>.

Первым уровнем развития способности является *ситуативное решение*, возможность в конкретной единичной ситуации найти действие, разрешающее трудность и позволяющее найти ответ на вопрос. На материале таких ситуативных решений, особенно в задачах, не требующих специального знания, но позволяющих легко реконструировать и преобразовывать структуру объекта, экспериментально обнаруживаются два феномена, появление которых уже заставляет поставить под вопрос натуральное представление о способностях:

- многие задачи гораздо проще решаются маленькими детьми или взрослыми, не получившими формального образования, чем теми, кто освоил математику по формальным меркам хорошо [2];
- успешному решению может предшествовать исследование отношений внутри задачи, не имеющее прямого отношения к требующемуся ответу или практическому действию; но те, кто тратит дополнительное время на такое исследование, эффективно решает уже не одну задачу, а класс задач. По метафорическому определению А. К. Дусавицкого, не путешествует по ущельям, а поднимается на вершину, чтобы обозреть окрестности целиком [10].

Оба эти феномена демонстрируют, что человек, решающий задачу, может перейти от уровня ситуации к уровню модели. Если в предметной ситуации все сводится к единичному решению, то

---

<sup>22)</sup> Мы несколько «спрямляем» модели, выстроенные в рамках гештальт-теории [2], генетической эпистемологии [23], культурно-исторической теории [10].

на этом уровне уже можно выделить *способ* деятельности, выраженный в терминах модели и ее математического описания. Выход на уровень способа позволяет в итоге не случайно найти формальное преобразование математической модели, решающее задачу, а выстроить его целенаправленно, закономерно и обоснованно.

Несколько упрощая предмет обсуждения, можно сказать, что *способный* человек — это тот, кто умеет найти, выстроить способ. Можно выделить способность как следующий уровень обобщения, по отношению к предметному действию и способу, и рассматривать ее как особое качество, позволяющее находить новые способы.

Для этого, как уже было сказано выше, ученик должен регулярно помещаться в ситуации, требующие нахождения новых способов решения задач — такого рода ситуации, как отмечено выше, могут быть связаны и с исследованием математических объектов самих по себе, обнаружением их неочевидных закономерностей, так и нахождением математических законов и математических объектов в практических ситуациях.

Далее, необходимы задачи такого уровня сложности, которые не могут быть решены без кооперации и коммуникации. Это позволит освоить математический язык и математическую аргументацию, культуру обоснования не как внешнее требование педагога, а как необходимое условие выстраивания продуктивной совместной деятельности; кроме того, позволит внутри одной структуры математической деятельности выделить разные позиции, интериоризируемые затем в профессиональном математическом мышлении<sup>23)</sup>.

Кроме того, отдельно можно выделить оформление полученного результата, не только в культурной форме описания исследовательской работы, но и в культурной форме учебного текста, адресованного «тем, кто не знает». Для этого тем более нужно выделить не только содержание найденного способа, но и условия его применения.

Очевидно, что математическая *способность*, в отличие от совокупных знаний, умений и навыков, может быть сформирована лишь в ситуации самостоятельной деятельности ученика. Поскольку речь идет об *поэтапном освоении* (а не просто о *принятии*) учеником определенных новых способностей и способов деятельности,

---

<sup>23)</sup> Наиболее полно спектр этих позиций в решении конкретной сложной математической задачи — доказательство и обобщение теоремы Эйлера о топологических характеристиках многогранников — описан И. Лакатосом [14].

в том числе «раскладываемых» на «знания, умения и навыки», необходимо, чтобы была организована деятельность, обуславливающая необходимость такого освоения (связанная с решением конкретных практических задач в режиме, когда от ученика требуется самостоятельно выделить и сформировать способ и методы решения, либо непосредственно с реконструкцией и общедоступным описанием способа осуществления деятельности на основе собственного понимания). С другой стороны, поскольку математическая способность является результатом не познания «готовых», заведомо сконструированных информационно-познавательных единиц, организованного в большей или меньшей степени деятельностным образом, а решения задач, постольку ее формирование должно осуществляться в ходе решения *практических* задач, описываемых известными математическими законами, но предполагающих всякий раз новый подбор и новую комбинацию способов решения, а следовательно, не предполагающих этого решения в готовом и описанном виде («в конце учебника»). Конкретное численно выраженное решение должно стать результатом столь же конкретных действий учеников, реализованных в соответствии с установленными нормами, в общепринятых условиях, но — конкретными взрослеющими людьми, с опорой на их персональные установки и возможности, заведомо отличные от других. Притом подобное действие, чтобы стать основой и основанием для формирования и оформления компетенций, должно происходить не на основе строго очерченного, предзаданного педагогом материала, к тому же поданного определенным способом, заведомо влияющим на содержание, а на основе материала, самостоятельно «вычлененного» из окружающей действительности, определенного и оформленного как предмет анализа и моделирования и далее обработанного соответствующим образом. Ранее уже было сказано, что подобная модель деятельности вряд ли окажется возможной в рамках классно-урочного подхода в общеобразовательных учреждениях, который с успехом воспроизводится в ряде организаций и учреждений дополнительного образования.

По большому счету, в плане формирования предметных — и в том числе математических — способностей именно *открытое* дополнительное образование, в отличие от общеобразовательных практик и от традиционных форм дополнительного образования, связанных с функционированием конкретных учреждений, позволяет:

- научиться самостоятельно выделять предмет воздействия, выделять его условия и способ в ситуации, когда обозначена по-

требность, но способ и, тем более, конкретный план ее удовлетворения никак не заданы; в конечном итоге — научиться самостоятельно ставить задачу исходя из наличных условий;

- научиться выстраивать собственное мышление как особый способ структурирования окружающей действительности, исходно представленную в «первозданном» виде, исключая даже указание на возможные исходные принципы структурирования; притом речь идет о способе структурирования, основанном на методологии, свойственной конкретной сфере действительности и соответствующему ей учебному предмету;
- научиться эффективно действовать в конкретных ситуациях различного типа и различной степени сложности (от «настоящих» задач до этапов выполнения запланированной работы, требующих специализированного действия, но не связанных с принципиальной трудностью), опираясь на освоенные предметные знания и одновременно на способность моделировать ситуацию, и в соответствии с этим комбинировать методы и приемы деятельности.

Перечисленные результаты сравнительно легко и эффективно обеспечиваются следующими аспектами открытого дополнительного образования:

- познавательная и мыследеятельностно-оформительская работа с целостной действительностью, непосредственно данной в наблюдениях за жизнедеятельностью на какой-либо территории или в какой-либо сфере или же специально смоделированной, но опять же в комплексном виде;
- длительный, логически выстроенный, поэтапно преемственный характер собственной деятельности учеников, на каждом этапе сопровождаемой специализированными действиями педагогов;
- решение образовательных задач, организованное в режиме проектных действий различной сложности и масштаба, но в равной степени предполагающих самостоятельное конструирование учениками плана и способа действия;
- необходимость достижения результата в соответствии с изначально поставленной задачей и обозначенными требованиями к данному результату, а не в соответствии с изначально заданным алгоритмом действий, который необходимо воспроизвести с максимальной точностью, и не с «правильным вариантом решения»;



- наличие рефлексивного контура самостоятельных пробных действий ученика и сопровождающих профессионально-педагогических действий наставника, позволяющего оформить способность на основе опыта конструирования и реализации способа деятельности ученика.

## Глава 2

### **Цели и подходы к развитию математических способностей**

*Существующие цели были оформлены, по преимуществу, как решение отдельных задач организации и разработки содержания образования. Аналогично подходы сформировались исторически, без особенного теоретического осмысления, что создает, в силу их распространения и укоренения в системе общего и дополнительного образования, дополнительные сложности при развитии и поддержке действительных математических способностей.*

#### **1. Сложившиеся подходы и их цели**

В советской системе дополнительного образования сложилось два подхода к дополнительному образованию в области математики, в разной степени содержательно и институционально оформленных, но существенно повлиявших на качество математического образования в целом.

Основу массового математического образования составляли академические формы, представляющие собой освоение математического знания в его «ставшем» виде, в каком оно представлено в научных текстах — как совокупность определений и утверждений, разворачивающихся в своей внутренней логике. В академических формах решалась общая задача математического образования — формирование ряда универсальных ей через освоение математического знания («математика хороша уже тем, что ум в порядок приводит»).

Например, освоение отношений порядка, сравнения и меры — через арифметику.

Освоение анализа и синтеза, с использованием визуальных моделей, и освоение культуры доказательных рассуждений — через геометрию.

Освоение точного и последовательного применения известных правил для достижения результатов — через алгебру.

Дополнительное образование требовалось в двух случаях.

Первый подход («занимательность») был направлен на приобщение к математическому знанию тех, кто еще не готов для работы с его академическими формами, на формирование предварительных представлений о характере математического знания, специфике математических объектов. Он разворачивал содержательно-эмпирический подход к содержанию, в силу конфликта с формальными подходами, рассматривался массовой практикой как нечто не серьезное.

Второй подход («рекордность») был направлен на дальнейшую поддержку тех, кому традиционные академические формы уже не достаточны — но оставался в рамках формально-теоретического подхода к содержанию и потому позволял готовить решателей задач, но не тех, кто может понимать реальные практические ситуации и формулировать на их основе новые задачи.

Остановимся на них подробнее.

### **1.1. Занимательная математика**

В основании подхода лежит противоречие между необходимостью формирования картины мира, в которой точное научное знание непосредственно связано с исследованием объективного мира и конструированием техники на основе познанных законом природы, и академическим представлением математики как особого мира идеальных сущностей, не имеющих отношения к какой-либо действительности.

Политехническая школа — как и предшествовавшая ей трудовая школа — требовала максимально широкого освоения не только азов математического знания, но и сложных математических понятий, применимых в современной технике и в современной повседневности, причем именно на уровне применения или хотя бы узнавания<sup>1)</sup>.

В то же время академический подход к преподаванию был ориентирован на представление математики как замкнутого мира со своими объектами (не имеющими отношения к объектам реальной действительности) и правилами рассуждения, не похожими на правила анализа ситуаций и принятия решений в практике

---

<sup>1)</sup> Не касаясь эксплуатации сложной техники, можно привести как примеры отрицательные числа при применении градусной меры температуры, координатную сетку при ориентации на карте, евклидову геометрию при обустройстве жилого помещения и разметке земельного участка.

ской деятельности. Преобладание этого подхода (унаследованного из классической гимназии и университета) как в общем среднем образовании, так и в подготовке инженеров, приводило к иллюзии оторванности математики от жизни, бессмысленности ее изучения для решения практических задач. Это сказывалось, в частности, на отношении к математике студентов инженерно-технических дисциплин и профессионалов, для которых было принципиально качество инженерного образования и актуальность полученных студентами знаний<sup>2)</sup>.

Цель *занимательной математики* — появление и актуализация интереса к математике как особому типу знаний и роду занятий через обозначение связи математики с реальными практическими ситуациями и техническими решениями, через представление истории математики как борьбы идей и реальных жизненных драм либо как приключения в сказочном математическом мире.

Формы реализации, по преимуществу вне системы образования:

- Научно-популярная литература: рассказ о конкретных математических понятиях и законах, об обстоятельствах их появления и открытия, о спектре полезных приложений (включая биографии ученых, делавших открытия, и исторических обстоятельств появления конкретных задач и способов их решения).
- Научно-приключенческая литература: помещение героя в реальный или вымышленный мир, где каждое приключение связано с решением конкретной задачи, применением понятия либо обнаружением артефакта, который реализует математическую схему и может быть применен только при условии понимания этой схемы. Часто использовались сказочные персонажи, математические по своему происхождению, как «кубарик» (лошадь из кубиков) [15] или «нолик» [18], или утрированный образ ученого-математика, как «магистр рассеянных наук» [19].
- Математические головоломки (от лабиринтов для малышей до криптографических задач для подростков), решение которых не требует предметных математических знаний, но требует применения схем рассуждения, сходных со схемами рассуждения при решении математических задач. Эти головоломки

---

<sup>2)</sup> Характерна в связи с этим критика академиком А. Н. Крыловым, выдающимся инженером-кораблестроителем, подхода к преподаванию математики в инженерных вузах с избыточно для будущего инженера скрупулезными доказательствами и полным отсутствием инженерных приложений [13].

регулярно публиковались в массовых детских и подростковых журналах.

- Методические рекомендации для учителей, направленные на усиление *занимательности* тем школьного курса<sup>3)</sup>.

За исключением методических рекомендаций, ориентированных на применение в системе образования, занимательная математика существовала в форме детской и подростковой литературы, специализированных журналов и отдельных рубрик в массовых журналах. Методические рекомендации же применялись лишь по усмотрению учителя и с большой вероятностью входили в противоречие с общей логикой школьной программе, в целом не влияли на содержание и формы массового образования.

Можно утверждать, что занимательная математика разворачивалась в форме культурного движения, существовавшего параллельно образовательным институтам и решающего задачи, которые ставились, но не решались этими институтами. Можно считать это движение одним из прототипов современного *неформального* образования, в котором образовательные задачи решаются культурными сообществами, особой организацией среды, насыщенной культурными артефактами — и решается не системно.

### **1.2. Отбор и поддержка математически одаренных школьников**

Массовое разворачивание математической подготовки в общеобразовательной школе показало, что из всей совокупности школьников, успешных в освоении математического знания, можно выделить небольшую группу наиболее успешных.

Основные параметры, которые позволяли выделить эту группу (к сожалению, ее статистическая оценка отсутствует, но по различным эмпирическим оценкам в нее попадает около 1 % учащихся общеобразовательных школ) [16]:

- успешное освоение решения *типовых* задач без многократного повторения;
- интерес к задачам, не являющимся типовыми, в том числе к задачам повышенной трудности и математическим головоломкам;

---

<sup>3)</sup> Хорошие, тщательно проработанные пособия такого рода, позволяющие учителю говорить о современной науке доходчиво с эмпирически мыслящим учеником, — книги Я. И. Перельмана; математическим темам посвящена конкретно [22].

- способность применять математические модели и схемы рассуждений к решению задач других школьных предметов и анализу повседневных ситуаций.

Совокупность этих качеств была определена как *математическая одаренность*, сопоставимая с художественной или спортивной одаренностью. Соответственно, была выстроена система работы с математически одаренными детьми и подростками, аналогичная системе их отбора и подготовки в спорте и в сфере искусства.

Важно отметить следующее различие. Система работы с одаренными детьми в спорте и искусстве была ориентирована, скорее, на *престиж*. Система отбора и поддержки математически одаренных была ориентирована на математические и физические факультеты ведущих университетов и фундаментальное физико-техническое образование, представляла собой инвестиции в кадровый потенциал фундаментальной науки и разработок, связанных с военно-промышленным комплексом. Поэтому «закрывающимися» звеньями цепочки были ведущие вузы страны, и научно-инженерное сообщество во многом определяло стратегии дополнительного математического образования.

Цель *отбора и поддержки математически одаренных школьников* — инициация и поддержка рекордных стратегий и достижений в области математики с выходом на отбор и раннюю профессионализацию в области точных наук и их приложений.

Профессионализация при этом мыслилась как освоение (и присвоение) сложных предметных задач и способов их решения. Для научных и инженерных школ готовились квалифицированные исполнители, но не возможные лидеры, способные ставить задачи.

Выстроенная многоступенчатая система включала в себя:

- *Кружки любителей математики*. Содержание: анализ решенных в истории математики задач, практически часто бесполезных, но приводящим к появлению эстетически значимых объектов, построенных математическими средствами, или емких универсальных схем, неожиданно обнаруживающихся в задачах, различных по материалу. Назначение: отбор математически одаренных школьников, включение их в круг тем, отличных от школьной математики, формирование представления о математике как о привлекательной сфере профессиональных занятий.
- *Предметные математические олимпиады*. Соревнования по решению сложных задач, выстроенные по иерархической схеме

спортивных соревнований с поэтапным усложнением заданий. Подготовка к участию сопровождалась включением в содержание кружковой работы решения и разбора задач олимпиадного типа<sup>4)</sup>. Предполагалось, что победитель олимпиад верхних уровней уже представляет собой *идеального решателя задач*, которого далее, в высшем образовании, нужно только направить на нужный круг задач и снабдить соответствующими знаниями<sup>5)</sup>.

- *Специализированные физико-математические школы*. Среди которых можно выделить стационарные (в том числе интернаты) и интенсивные (летние).

Программы специализированных школ включали в себя углубленное изучение точных наук (с включением элементов высшей математики), кружковую работу с поощрением самостоятельного выбора сложных задач для самостоятельного исследования, знакомство с горизонтами поиска современной науки.

Летние школы дополнительно представляли собой помещение в особое социальное пространство, близкое к тому, которое формировалось в ведущих исследовательских институтах и конструкторских бюро<sup>6)</sup>.

Кроме содержания, выходящего за пределы школьного, как особенности таких школ можно отметить [17]:

- культ решения сложных задач и особую гордость (вплоть до осознания собственной элитарности) по поводу своей способности решать такие задачи;
- включение студентов соответствующих специальностей в качестве педагогов, не только преподавателей, но и воспитателей (в интернатах и летних школах), транслирующих определенные нормы коммуникации, принятые среди научных и научно-инженерных сообществ, соответствующий круг жизненных приоритетов и культурных интересов;

---

<sup>4)</sup> См, например, [38], статья «Математические олимпиады школьников».

<sup>5)</sup> Но в такой системе подготовки (как, например, в системе подготовки спортсменов рекордного уровня и выдающихся мастеров-исполнителей в искусстве) содержится значительный риск деформации личностных установок, включая полное пренебрежение социальным окружением и контекстами.

<sup>6)</sup> Общеизвестно, что наиболее полно особенности такого социального пространства отражены в повести А. Н. и Б. Н. Стругацких «Понедельник начинается в субботу: сказка для младших научных сотрудников».

- включение в непосредственную коммуникацию с учениками ученых, уже имеющих реальные достижения и общезначимые тематики исследований и разработок.

Отдельно можно выделить *специализированные издания*, ориентированные на изложение в доступной школьникам и школьным учителям форме содержания, выходящего за пределы школьного, в том числе современных научных достижений. В отличие от занимательной литературы, такие издания были ориентированы на читателя заведомо заинтересованного, готового разбираться в сложных понятиях и моделях<sup>7)</sup>.

На основе общей математической дидактики была выстроена система дидактических форм, направленных специально на отбор и поддержку математически одаренных школьников.

- **Задача повышенной сложности.** Требуется нестандартного применения известных способов или узнавания условий их применения.
- **Олимпиадная задача.** Требуется композиции известных способов, часто с обращением к разным разделам математики, и комбинации общих методов с неформальными схемами, такими как полный перебор вариантов.
- **Задача с неопределенными параметрами.** В отличие от обычной задачи, решение которой представляет собой движение от условий к результату, такая задача решается через интуитивную догадку и затем логическое обоснование вывода на основе заданных условий<sup>8)</sup>. Может моделировать исторически известную математическую задачу, как правило из тех, что демонстрируют красоту математики.

В силу особенностей классической дидактики, делавшей акцент на организации учебного материала, но не на организации учебной и педагогической деятельности, сама работа учителя с подобными задачами рассматривалась как особое искусство педагога, ее невозможно было нормировать, к ней невозможно было подготовить.

Рассмотрим примеры математических олимпиад.

*Международная математическая олимпиада (старейшая международная предметная олимпиада)* [43]. Заявленная цель — выявить

---

<sup>7)</sup> Наиболее популярные — журнал «Квант», книжная серия «Библиотечка журнала Квант».

<sup>8)</sup> Логическая структура таких задач и их дидактические возможности подробно проанализированы Д. Пойа [27] и Р. Смоллианом [32, 33].



на международном уровне детей, подростков, юношей с наиболее развитыми математическими способностями. Именно способностями, поскольку задачи специально формулируются так, чтобы их было можно решить без владения математическим формализмом, опираясь на интуицию и способность к *реконструкции* знания, чем эти знания в «готовом виде», как нечто заведомо, «раз и навсегда» усвоенное. Специальные призы этой олимпиады традиционно присуждаются за наиболее оригинальные, «красивые» решения тех или иных задач.

Начиная с этого места идет несогласованность, просьба переформулировать предложение

*Московская математическая олимпиада* [44] проводится с 1935 года (в том числе в военные годы). В отличие от предыдущей, содержит типы задач, требующие как содержательной интуиции, так и владения формальными преобразованиями. Включает себя задачи, возникавшие в ходе реальных научных исследований, но доступные для детей, подростков, старшеклассников. Является прототипом современной Всероссийской математической олимпиады, впрочем, акцентированной больше на формально-теоретический подход.

*Всероссийская математическая олимпиада для учащихся 8 классов* [41] создана как отдельная, поскольку к «основной» допускаются только школьники с 9 класса. Содержание заданий позволяет говорить о том, что к самому понятию «математических способностей» разработчики подходят не вполне из формально-теоретического подхода, отчасти развивают подход, основанный на обыгрывании шуточных и сказочных ситуаций — но система оценки игнорирует интуицию, требует предъявления формального доказательства.

*Кенгуру* [42]. Направлена на вовлечение как можно большего количества детей, подростков, старшеклассников в решение математических задач как форму досуга, позиционирует решение задач как увлекательную «и даже веселую» активность и способ самореализации исходя из личностных особенностей каждого участника, выстраивая индивидуальный подход через организацию дистанционного этапа.

На учителя — лишь формальная обязанность регистрации ученика в дистанционном этапе; интересно, что дистанционный этап задает жесткие временные ограничения на решение задач, но имеет внеконкурсный характер, скорее, позволяет ученикам составить представления о своих познаниях и дефицитах, его результатом является подробный отчет об уровне математической подготовки каждого участника.

В финале также основным результатом является оценка собственных знаний; этот формат является инструментом не отбора, но получения участником, его наставником, системой образования региона обратной связи о качестве математического образования.

Интересно, что задачи стратифицированы:

- те, которые можно решить без специальной подготовки, которые позиционируют математику как увлекательную игру;
- направленные на проверку конкретных, точных предметных знаний;
- требующие применения мышления: анализа условий задачи, выбора или даже конструирования способов ее решения.

Ограничением является бинарный характер проверки заданий («Да/Нет»). Это существенно упрощает алгоритм проверки, но не позволяет получить обратную связь в полном объеме — а для такой обратной связи в большинстве случаев принципиально важно, где именно сделана ошибка.

*Олимпиады Развивающего Обучения* [40]. Предназначены для учеников школ, реализующих программы развивающего обучения (система Д. Б. Эльконина — В. В. Давыдова). В отличие от перечисленных, они ориентированы не только на предметный результат, но и на оценку способностей в собственном смысле, а также не только на индивидуальный, но и на командный зачет, включающий эффективное участие в коммуникациях по поводу собственных интересов.

*Индивидуальный тур* проводится как *предметный*, выявляет умение использовать известные способы действия и источники информации для решения конкретно-практических задач по отдельным учебным *дисциплинам* как на базовом уровне (осознанное освоение учебного предмета), так и на функциональном уровне (использование соответствующих знаний, представлений, моделей мышления для решения практических задач). Принципиально: участники могут по своему усмотрению участвовать в соревнованиях в нескольких и даже во всех предметных областях.

*Парный тур* выявляет способность решать предметные задачи в кооперации, совместно выстраивать план работы, распределять функции, интегрировать полученные результаты, изменять свою деятельность в зависимости от ситуации партнера. Важно, что здесь задачи не выдаются участникам по усмотрению организаторов, а выбираются ими самостоятельно, также по обоюдному

согласию, что с самого начала позволяет продемонстрировать готовность участников к коммуникации и управлению.

*Командный тур* проверяет способностью выстроить взаимодействие в разновозрастной группе, решить конкретную проектную задачу, единую для всех участников олимпиады, содержательно не привязанную ни к какому предмету, но требующую для своего решения владения знаниями, представлениями, способами деятельности из разных предметов. Завершением является защита решения в команде школы, участвующей в олимпиаде, и синтез решений общей задачи в единое проектное предложение внутри возрастной группы.

Именно этот тип олимпиад, в общей идеологии Развивающего Обучения, реализует содержательно-теоретический подход и одновременно предполагает выход участника в субъектную позицию, действие *от себя*. Задания парного и командного этапа имеют отчетливо практический характер, связаны с экономикой, логистикой, архитектурным проектированием — но, с точки зрения сложившихся подходов, допускают как применение предметных знаний, так и фантазийные решения, которые могут быть не тривиальными, но фактически ничего не говорят о фактических предметных знаниях детей и владении конкретными способами решения задач<sup>9)</sup>.

## 2. Новые контексты и приоритеты

### Современные контексты математического образования

Современная ситуация вокруг практик преподавания математики и в целом математического образования складывается из следующих обстоятельств.

Прежде всего, изменился сам характер применения математики в технических и управленческих решениях.

1. Предыдущее поколение технологий предполагало, что математическая модель сложного устройства присутствует в мышлении технологов, конструкторов, организаторов производства и эксплуатации, но не в самом устройстве. Современные устройства со встроенными системами автоматического управления, особенно программируемые устройства, содержат математическую модель

---

<sup>9)</sup> Из этого критического замечания, впрочем, может следовать и то, что олимпиады Развивающего Обучения, в отличие от традиционных, служат не для проверки знания, а именно для оценки способностей, и не только математических.

«в себе»<sup>10)</sup> и в определенном смысле требуют математической квалификации от пользователя.

2. Практики, напрямую не связанные с техническими решениями в узком смысле, строятся на основе сложных математических моделей (экономическое и социальное планирование, организация транспортных потоков и инфраструктур жизнеобеспечения).

3. Современная математика сегментирована на разделы «чистой» и «прикладной» математики, в том числе как отдельная область выделилась «теоретическая информатика» (computer science). Внутри «прикладной» математики основным видом деятельности является постановка задач на основе анализа ситуации и поиск способов их решения (в том числе с использованием существующих моделей из разных областей математики), а не построение обобщенных моделей и исследование их свойств<sup>11)</sup>.

Кроме того, изменились социальные и антропологические контексты.

1. При «ручных» технологиях обработки информации элементарная грамотность могла обеспечить минимум социализации; этапы освоения арифметики и алгебры соответствовали социальным ступеням:

- устный счет — умение сосчитать деньги, базис экономической успешности;
- счет «на бумажке» — умение рассчитать бюджет, возможность работать счетоводом или делопроизводителем;
- счет по формулам, в том числе с использованием логарифмической линейки и таблиц — технолог или планировщик;
- грамотное преобразование формул, переход между формулами и чертежами — начала инженерного образования.

В настоящее время важным остается умение понимать формулы и как схемы вычислений, и, шире, как модели, позволяющие выразить структуру природных и технических процессов в виде величин и их отношений, соответственно, максимально точно понимать характер этих процессов. Сам по себе навык счета с его сложной иерархией инструментов остается в прошлом.

---

<sup>10)</sup> На профессиональном сленге разработчиков таких устройств (от «умных» телефонов до «умных» домов и систем управления транспортными потоками) математика «вшита» в эти устройства.

<sup>11)</sup> Говоря метафорически, результатом работы современного математика являются не теоремы, а алгоритмы; теоремы нужны для того, чтобы убедиться, что алгоритмы правильно работают [6].

2. Современный ребенок и, тем более, подросток обучен мыслить значениями, выражающимися в последовательностях образов, а не в грамматических конструкциях.

С точки зрения чистого математического содержания, этот тип мышления куда ближе к античной геометрии (с визуализацией всех построений), чем к современной математике, в основе которой лежат алгебраические конструкции<sup>12)</sup>.

В то же время алгебраическая составляющая математического знания стремится стать ведущей, в том числе захватить все академическое математическое образование, в то время как исходно алгебра рассматривалась лишь как удобный инструмент для сокращения рассуждений, имеющих в своей основе геометрические построения, и тем более — для сокращения вычислений<sup>13)</sup>.

Цифровые вычислительные машины легко программируются на решение задач, связанных с преобразованиями чисел, формул и формально организованных высказываний — следовательно, наиболее естественным было бы усиливать в математическом образовании способность работать с образами и оформлять интуитивные решения, с тем чтобы превратить их в программы для цифровых вычислительных машин. Но существующее математическое образование — как в своих массовых формах, так и в подходе к построению нестандартных, в том числе олимпиадных задач — по-прежнему делает акцент на технику вычислений и формальных преобразований.

3. В современной культуре утрачивается единство картины мира, и даже единство принципа, на котором эта картина мира может быть выстроена. В элитарных формах это реализуется как критика принципов рациональности, дробления научной картины мира на множество конкурирующих школ и подходов, возобновившиеся споры отличия научного от лженаучного знания.

---

<sup>12)</sup> Мы можем сравнить хотя бы античные построения, связанные с бесконечно малыми величинами [34, 36], и соответствующие рассуждения в современных учебниках математического анализа — и оценить их по степени понятности и выразительности.

<sup>13)</sup> По меткому замечанию В. А. Арнольда, *все группы являются группами каких-либо преобразований, но только алгебраисты это тщательно скрывают от непосвященных* [1]. Иначе говоря, в формально-теоретическом подходе математический объект, построенный как инструмент решения достаточно широкого класса задач, смысл которых определяется приложениями, начинает претендовать на самостоятельность, его исследование выделяется в автономную область науки, выстраивающую свой язык и свои правила рассуждений, «недоступные прикладникам».

В массовой культуре такое же дробление связано с формированием новых мистических культов, с утратой различий между наукой и магией, между достоверными и вымышленными фактами. Если на уровне конкурирующих научных школ и подходов все же применимы общие критерии научной рациональности, то в массовом сознании любое содержание, выдающее себя за «школьное», претендует быть научным.

Это тем более опасно, что современные технические решения, материализующие научную и инженерную рациональность, реализованные на их основе устройства и инфраструктуры требуют рационального мышления (исключающего мистические совпадения и иные мистические изыски) не только от разработчиков, но и от пользователей.

Такой идеал рациональности должна задавать не формальная логика, основной дефицит которой — произвольность посылок любого логически строго рассуждения, и не какая-либо наука, обращенная к объективной действительности — именно вследствие постоянного обновления подходов, связанных с появлением новых фактов, усомнением постулатов и обновлением парадигм.

Этот идеал рациональности должна задавать математика — но не как прикладная формальная логика и искусство формальных преобразований (как в академическом подходе), но как искусство моделировать действительные отношения и процессы в виде отношений величин и схем их преобразования.

### **Современные цели развития и поддержки математических способностей**

1. Математические способности рассматриваются как основа для рационального мышления, формирования критериев рациональности знания в разных сферах профессиональной деятельности и в формировании жизненных стратегий в целом.

Дополнительное образование здесь может ставить следующие цели:

- Формирование базовых приемов рационального рассуждения, анализа и аргументации на материале практических, в том числе «житейских», задач, разрешаемых при помощи математических знаний и интуиции. Эта цель означает создание основы математических способностей у тех подростков и юношей, кто в целом не связывает свое будущее с математикой и профессиями, использующими математическое знание и приемы мышления,

но нацелен на практики, требующие рационального и осмысленного принятия решений, на практики управления.

- Формирование вкуса к сложному мышлению (на материале постановки необычных задач, поиска неочевидных связей и отношений). В первую очередь такое дополнительное образование должно помогать подросткам и юношам, обладающим сложной внутренней жизнью, развитой способности к эмоциональному включению и резонансу, сопереживанию, и должно помогать в оформлении переживаний в постановку задач и формирование конструктивных решений, что особенно актуально для тех, кто нацелен на творческие практики и практическую психологию.

Такое дополнительное образование может быть *дважды дополнительным*, по отношению к дополнительному образованию, направленному на включение в современные гуманитарные практики, или быть дополнительным для гуманитарных профилей.

Здесь уместно движение от содержательно-эмпирического подхода к освоению основ содержательно-теоретического с примерным пониманием роли математического формализма, без его виртуозного освоения.

*Наиболее зарекомендовавшие себя формы здесь* — художественные сюжеты, содержащие в своей основе математические проблемы; наиболее очевидны детективные сюжеты, связанные с криптографией<sup>14)</sup>, произведения, в которых разрешение коллизии опиралось на понимание того, что внешне бессмысленный набор знаков представляет собой зашифрованный текст, и разгадку шифра. Хорошей образовательной формой является клуб любителей подобных сюжетов, возможно, с соревнованиями на лучшего дешифровщика.

Отдельно стоит рассмотреть культурно-образовательный проект «Числа» («Numbers»), основанный на сериале, выходящем в США на канале CBS с 2005 по 2010 год [39]. Запуск этого проекта был инициирован Агентством национальной безопасности, показавшим, что катастрофический упадок математического образования и интереса американских школьников к математике представляет прямую угрозу национальной безопасности.

Квалифицированных математиков, физиков, программистов американского происхождения перестало хватать даже для ключевых сфер военно-промышленного комплекса. Задача популяризации

---

<sup>14)</sup> Из классики можно упомянуть Эдгара Алана По («Золотой жук»), Артура Конан Дойля («Пляшущие человечки»), Жюль Верна («Дети капитана Гранта», «Жагада»).

математики, позиционирования ее одновременно как занятия увлекательного и занятия, имеющего принципиальную, первостепенную социальную значимость, стала уже не педагогической, а социальной.

Но в то же время эта задача стала результатом частной инициативы. Авторы фильма, прослушав лекции известного в США популяризатора науки У. Ная, осознали, с одной стороны, всю широту спектра практического применения математического знания, с другой — недостаточность чисто лекционных форм для популяризации.

Сериал строится как детективный, связанный с деятельностью ФБР (эти мотивы традиционно популярны у массового телезрителя в США). Главные герои — братья; старший — агент ФБР, младший — ассистент вымышленного Калифорнийского научного института. Старшему брату регулярно поручают следствие поголоволонным делам, а младший подсказывает ему ключ к раскрытию преступлений, выявляя закономерности и взаимосвязи за счет расширенного математического аппарата (яркий пример — поиск и в итоге задержание опасного маньяка за счет чисто математического вычисления закономерности появления тех факторов, что побуждают его совершать преступления).

Показательна система персонажей — в нее входят друг и учитель младшего брата, физик-теоретик<sup>15)</sup> и аспирантка из Индии<sup>16)</sup>. Важно, что в каждой детективной ситуации присутствуют конкретные математические законы и теоремы, а не наукообразные рассуждения героев.

Важно, что сериал сопровождался рассылкой методических текстов по сети учителей математики, позволявшим потенциально в каждой школе после выхода очередной серии собирать кружок любителей «Чисел» и разбирать очередную задачу.

2. Математика рассматривается как универсальный язык для понимания природных, технических, общественных (в том числе экономических законов), о чем подробно говорилось во вве-

---

<sup>15)</sup> Это позволяет задать максимальную размерность научно-теоретического мышления, показать его базовые принципы, обуславливающие возможности моделирования и прогнозирования, свойственные любой научной области.

<sup>16)</sup> Возможно, дань не только интернациональному характеру математики, но и роли ученых Древней Индии в формировании основ математического знания. Например, только в индийской культуре мог быть открыт *ноль*, как известно, и греки, и унаследовавшие им арабы старались избегать «ничего» как предмета рассуждений, в том числе как особой величины.



дении. Соответственно, необходимо развитие способности переходить от практических моделей, используемых в «науках о реальности», к математическим моделям, с возможностью использовать математический формализм для преобразования этих моделей и поиска практически применимых мышлений.

Отметим, что единственная область приложений, математический аппарат которой представлен в школьной программе, — физика, в особенности механика, электродинамика, теория колебаний, построенные на применении аппарата дифференциальных уравнений. Но большинство этих разделов изучаются до того, как осваиваются хотя бы основы дифференциального и интегрального исчисления, что приводит к огромным трудностям в освоении основных понятий физики большинством учеников.

Другие же области приложений математики, сформировавшиеся в течение XX века и продолжающие активно формироваться в настоящее время, остаются за пределами школьной программ. Тем самым роль математики в формировании современной научной картины мира (как и вообще единство картины мира) остается за рамками школьной программы и может быть восстановлена лишь программами дополнительного образования.

Прежде всего, здесь оказываются актуальными опять же программы открытого дополнительного образования, хотя бы потому, что они по определению, в большей или меньшей степени, обеспечивают формирование именно *целостной* картины мира, именно за счет открытого, объемлющего характера представления предметности и соответствующих посильных для школьников форм, способов и методов ее освоения и преобразования.

Другие аспекты эффективности открытого дополнительного образования как подхода, позволяющего математическим дисциплинам полноценно выполнить свою функцию значимого фактора при конструировании картины мира, связаны:

- с первостепенным значением самостоятельного *конструирования* учеником последовательности его действий в ходе освоения материала и связанной с ней последовательности сопровождающих и обеспечивающих действий педагога (поскольку картина мира в любом ее аспекте, в том числе научном, может быть сформирована только в ходе самостоятельного действия, предпосылки к которому также были выстроены и сконструированы образующимся субъектом);
- с работой не со специально оформленным и дидактически выверенным учебным материалом, а непосредственно с объек-

тами, процессами, явлениями окружающей действительности, в том числе с теми, которые являются проблематичными или излишне трудоемкими для дидактического оформления, в частности потому, что не могут быть представлены в рамках какой-либо единой предметной дисциплины;

- с позиционированием в качестве показателей успешности учебного и учебно-практического действия не соответствия выполненным действиям искусственно вмененным требованиям, а заметным и потенциально измеримым изменениям в реальной действительности; а эта возможность *исходит* либо из того, что ученики *усвоили* некую картину мира и в ходе образовательного действия сумели дополнительно отнестись к ней и оценить ее достоверность, либо из того, что они *сконструировали* для себя картину мира или хотя бы ее основы в ходе собственного практического действия;
- с изначальной целевой установкой большинства практик открытого дополнительного образования на формирование у взрослых людей как минимум целостного представления об изучаемом объекте как функциональном компоненте того пространства («мира»), в котором им придется действовать, как максимум — важных свойств объемлющей картины мира в целом, обуславливаемых изучаемым объектом и связанными с ним вопросами.

Здесь наиболее эффективно движение в содержательно-теоретическом подходе, с освоением формально-теоретического как комплекса инструментов, позволяющих выполнять преобразования модели *точно и быстро*.

Наиболее этот подход проработан в формах дополнительного образования, связанного с техническим творчеством: прежде чем создать новую конструкцию хотя бы в модели<sup>17)</sup>, ее необходимо точно рассчитать, с учетом нюансов, заведомо выходящих за рамки школьной математики. Точно так же он может использоваться в формах, связанных с исследовательской деятельностью, в том числе с гуманитарными исследованиями «в поле»<sup>18)</sup>.

<sup>17)</sup> А тем более действующую техническую конструкцию с требованиями эффективности, прочности, надежности — что особенно хорошо заметно в технических видах спорта, требующих создания устройств собственными руками, например в картинге и багги (если выделять виды спорта, подходящие школьникам по требованиям безопасности).

<sup>18)</sup> Впечатляющий, но не описанный пример: исследование распределения Ципфа—Парега на материале анализа цен на рынке в областном центре.

Другие зарекомендовавшие себя формы здесь — компьютерные игры, в том числе командные, основанные на сложных математических моделях действительности, в том числе:

- экономические игры, моделирующие сложное взаимодействие между субъектами экономики в условиях постоянного изменения правил игры виртуальным «государством»;
- военно-тактические симуляторы (World of Tanks, Battleship), основанные на точных математических описаниях реальной военной техники и театров боевых действий;
- «интегральные» стратегические игры (SymCity, Civilization), требующие одновременной оценки многих численно выраженных параметров и их связей;
- игры-приключения, требующие решения сложных задач-головоломок разного рода (в том числе логических, теоретико-информационных, теоретико-механических).

Дополнительно можно указать логические игры и головоломки.

Классические логические головоломки, построенные на сюжетах о «лжецах и правдецах», были систематизированы и проанализированы Р. Смаллианом. В частности, им было показано, как через решение серии таких головоломок современный студент или школьник может понять парадоксы классической схоластики и освоить математическую логику вплоть до теоремы Гёделя о неполноте всякого формального исчисления [32, 33].

Но существуют так же ситуационные задачи, где необходимо восстановить причинно-следственную связь событий, задавая лишь вопросы, допускающие лишь ответ «да» или «нет». Такие задачи исходно были придуманы для обучения будущих следователей и криминалистов, но популярны также в сообществах студентов-математиков.

Такие задачи, по нашим данным, нигде не описаны, поэтому приведем несколько примеров.

*Сосуд разбился, она умерла.* Решение: она — рыбка из разбившегося аквариума.

*Человек в гостинице долго не мог уснуть. Он открыл телефонный справочник, позвонил, дождался, пока ответят, тут же положил трубку, лег и спокойно уснул.* Решение: сосед за стенкой сильно мешал своим храпом; телефон соседнего номера заведомо был в гостиничном справочнике.

Некоторые задачи строятся на литературных и сказочных сюжетах, тогда нужно восстановить еще контекст произведения.

*Хочу банан. — Принеси тогда полотенце.* Решение: старик Хоттабыч только что принял душ, а с мокрой бородой он колдовать не может.

Некоторые задачи строятся на метафорах, и решающий должен еще понять, идет ли речь о реальной или хотя бы вымышленной ситуации или используется идиома.

Например:

*Дверь открыли, топор упал.* Решение: в комнате было столь душно, что хоть топор вешай. Вот он и висел. А когда открыли дверь, немного проветрилось.

Решение таких задач тренирует, прежде всего, культуру логической дихотомии. При коллективном решении дополнительно обнаруживается, что участники (как правило, задающие вопросы в спортивном азарте наперебой), должны помнить, что уже известно, а что неизвестно, и строить логическую карту события.

### **3. Возрастные условия, задачи и результаты математического образования**

Возрастные особенности при формировании математической способности связаны как с организацией мышления и восприятия в разных возрастах, со спецификой ведущей деятельности и социальной ситуации развития, так и с возможными ожиданиями по отношению к образовательным результатам. Эти возможные ожидания вытекают из того, рассматривается ли математическое знание в первую очередь как всеобщая культурная ценность, как условие включения в мир современной техники и технологий или как условие будущей профессиональной деятельности, связанной с решением математических задач как внутри самой математики, так и в ее приложениях.

И в программах основного общего образования, и в программах конкретных («отдельных») учреждений дополнительного образования возрастные особенности учеников также учитываются, что часто отражается в конкретных разделах пояснительных записок. Однако практика показывает, что этот учет оказывается:

- либо преимущественно инструментальным: связан в основном с подбором конкретных методик отбора и подачи предметных знаний, адекватных для конкретного возраста, а не с конструированием в рамках данного предмета ситуаций компетентностного развития, соответствующих возрасту;

- либо сугубо формальным: связанный с распределением материала математических дисциплин, отобранных для преподавания, в режиме «от простого к сложному», безотносительно того, соответствует ли тот или иной блок данного материала объективным возрастным способностям данных учеников или — решению той или иной задачи возрастного развития (например, адекватно ли изучение именно операций с процентами возрасту 10–12 лет или операций с двучленами и многочленами 13–15 годам).

Такое положение определяется объективным условием организации учебно-образовательного процесса в общеобразовательных учреждениях — необходимостью освоения вмененного учебного материала в рамках отведенного времени, в логике «последовательного» освоения различных разделов, где последовательность разделов выстроена либо в соответствии с последовательностью генезиса научного знания, соответствующего предмету, либо в соответствии с оптимальной логикой освоения данного знания (какие разделы необходимо освоить раньше, чтобы последующие опирались на их знания как на необходимое условие освоения). О том, что осваиваемый учебный материал может и должен быть основой и источником для формирования возрастнo-сообразных компетентностей, здесь речи не идет, хотя бы в силу того, что оценка успешности деятельности педагогов осуществляется именно исходя из скорости подачи ими предметного материала и «прочности» освоения этого материала подопечными, но не исходя из приобретения последними за счет этого способностей или хотя бы новых системных и функционально используемых представлений о действительности.

В «традиционных» учреждениях дополнительного образования возрастные особенности учитываются в большей степени в силу того, что каждая образовательная программа предполагает специальную процедуру набора участников, а следовательно, должна отвечать осознаваемым запросам их родителей или даже их самих. Однако и здесь возрастные особенности учитываются в основном не с точки зрения обеспечения возрастнo-адекватного компетентностного развития, а с точки зрения эмоционального комфорта учеников и получения ими конкретных достижений, желательно внешне представленных и продуктивных. Эти результаты с очень небольшой вероятностью соответствуют как объективным возрастным задачам развития взрослеющих людей, так и, тем более, их личностным мотивам и побуждениям. Ведь объективная логика даже

пробной реализации ими своих мотивов и побуждений предполагает более длительный срок, чем продолжительность образовательной программы учреждения дополнительного образования, и более разнообразный спектр видов действия и взаимодействий, чем это возможно при прохождении стандартной, фактически, классно-урочно организованной программы дополнительного образования.

Программы открытого дополнительного образования, по причине, уже раскрытой выше, предполагают гораздо более содержательное и функциональное отношение к возрастным особенностям участников. В силу того, что все они опираются на реализацию индивидуальных образовательных траекторий, возрастные условия становятся для них не только необходимыми условиями работы, но, прежде всего, предметом целенаправленного педагогического воздействия, обуславливающим как частные результаты, достигнутые учеником, которые могут ни на что дальше не повлиять, так и, прежде всего, формирование устойчивых способностей впредь достигать подобные результаты, в том числе в изменяющихся обстоятельствах. Следовательно, программы открытого дополнительного образования, связанные с математикой как учебным предметом, заведомо не просто учитывают возрастные особенности как источники требований к подаче материала или к ситуациям формирования компетенций, а предполагают их в качестве объекта воздействия в ходе предметного преподавания, а их усиление — в качестве результата реализации образовательной программы. Иначе говоря, здесь необходимо «подхватить» связку объективно стоящих задач возрастного развития с конкретными содержательными деятельностными задачами, которые сам взрослеющий человек сознательно и субъектно хочет решить, и педагогически организовать и обеспечить их решение так, чтобы в результате школьник сформировал у себя математические способности одновременно как инструмент успешного выполнения той или иной деятельности и как устойчивые органичные компоненты возрастных новообразований.

В целом программы открытого дополнительного образования *заведомо* не могут успешно реализовываться без учета возрастных особенностей учеников, и не только на уровне отдельных адаптирующих приемов и методов образовательной деятельности, но, прежде всего, на уровне целеполагания программ, которое должно быть связано с реализацией учениками возрастнo-сообразных деятельностных траекторий и связанных с ними программами и моделями педагогического сопровождения.

В зависимости от возрастных особенностей и заявленных ожиданий могут быть предпочтительны разные подходы из перечисленных выше.

Как уже отмечено, способность появляется и проявляется только в деятельности, то есть заведомо предполагает постановку собственных целей или принятие внешних целей как своих; поэтому мы рассматриваем возрастные этапы как этапы становления субъекта деятельности, в общей логике культурно-исторического подхода [29].

### **Дошкольный возраст**

Основное содержание: освоение объективного мира как мира человеческих отношений, правил, в том числе как возможных сюжетов для игр. Объективные законы еще не различены с социальными конвенциями; правила счета, работы с формой, освоения основных законов симметрии, пропорций, равновесия воспринимаются именно как правила игры, как совместной (ролевой), так и предметной (кубики, конструкторы, мозаики).

О каких-либо особенных способностях применительно к освоению научного знания в этом возрасте говорить, безусловно, не приходится. Принципиально важно удерживать детскую любознательность, максимально наполнить опыт не только впечатлениями, но и основными объективными закономерностями, в том числе позволяющими решать элементарные практические задачи — с пониманием того, что многие структуры математического знания (например, обратимость и законы сохранения) ребенком еще не освоены.

В этом возрасте любое знакомство с математическими понятиями можно рассматривать как *дополнительное* в отношении к общим задачам образования (неоднократно признано, что увлечение массового дошкольного образования формально понятой *готовностью к школе* не адекватно возрастным возможностям и задачам). Наиболее эффективным в этом возрасте представляется содержательно-эмпирический подход с элементами формально-эмпирического.

Предпочтительными формами открытого дополнительного математического образования для детей данного возраста можно считать:

- сюжетно-ролевые игры, оформленные и позиционированные как проживание сказочных сюжетов, изначально представленных в оформленных литературно-художественных формах и посвященных задачам исчисления, приведения в соответствие

различных форм, в простейшей форме — знакомству с основными числами и геометрическими формами, базовыми математическими принципами и понятиями (например, повесть И. Токмаковой «Может, Нуль не виноват», детская дидактическая повесть Л. А. Левиновой и К. А. Сапгир «Приключения Кубарика и Томатика, или Веселая математика»);

- игровые пространства, позволяющие реализовать все, что хочет ребенок и считает полезным отвечающий за него взрослый человек, заведомо ориентированные на то, чтобы дети играли объектами, имеющими отчетливо и заведомо математические формы, притом играли в рамках заведомо заданных правил, предполагающих необходимость сравнения и сопоставления этих форм, либо — систематизации, структурирования, исчисления игровых объектов, представляющихся необходимыми, такими, без которых игра заведомо не состоится.

### **Младший школьный возраст**

Основное содержание: знание о предметном мире и его законах отделяется от знаний о социальных конвенциях. Предметный мир становится отдельной доминантой внимания, что подчеркивается появлением в социальной ситуации развития *школы* как общественного института и *учителя* как позиции, выступающей от имени объективной действительности и ее законов.

Традиционно в этом возрасте общепринят формально-эмпирический подход. Ученик осваивает действия счета, правила арифметики и обращение с основными фигурами посредством обобщения применения чисел к сериям эмпирических объектам и, далее, манипуляций с количествами, в которых правила арифметики непосредственно вытекают из действий с группами объектов.

Содержательно-теоретический подход, доказавший свою эффективность в практике Развивающего Обучения, требует одновременно достаточно сложной квалификации от учителя и культурной среды (может быть, культурной истории) ученика, в которой заведомо поощряются любознательность и готовность задумываться о неочевидных связях и отношениях в предметном мире.

Дополнительное образование может быть связано, в первую очередь, с эстетической стороной математики. Исследование таких типов отношений, как симметрии и пропорции, с одной стороны, может быть заведомо не привязано к «школьным» контекстам (что позволяет преодолеть «порог вхождения», показать красоту и привлекательность математики ученикам, формально к ней



не способным). С другой стороны — позволяет удержать математическое содержание как форму интеллектуального созерцания, опирающегося на непосредственное видение и преобразования видимого объекта.

На этом материале не в меньшей степени, чем на материале измерения отношений величин (в Развивающем Обучении), присутствует возможность перехода от содержательно-эмпирического к содержательно-теоретическому подходу.

Предпочтительными формами открытого дополнительного математического образования для детей данного возраста можно считать:

- математический клуб, представленный (позиционированный) как дизайнерское творческое объединение или клуб технического конструирования: в первом случае оказывается необходимо изготавливать эстетически безупречные творческие изделия, основанные на идеальных геометрических фигурах; во втором случае — производить расчеты, благодаря которым устройства, уже разработанные, «не инновационные», но привлеченные к решению нетипичных для них задач, смогут начать эффективно работать;
- пространства внеурочной работы, в том числе в группах продленного дня, предлагающие ученикам, в том числе на основе значимых для них «внешних» мотивов, произвести операции с разнообразными конструкторами, заведомо предполагающими измерение и соотношение величин и форм;
- усложненные формы игр по мотивам сюжетов, связанных с математическими вычислениями — уже на основе не только сказочных, но и научно-популярных, авантюрно-приключенческих сюжетов.

### **Подростковый возраст**

Основное содержание: предметный мир, уже достаточно освоенный на уровне первоначального знакомства с его законами, становится поводом для конструирования новых типов социальных отношений — для проб быть «почти взрослым», включаться во взрослые формы деятельности, в том числе исследование, проектирование, творчество. Эти формы могут осуществляться только в *совместном* действии, для которого одинаково важны как коллектив сверстников, так и наличие значимого взрослого.

Таким взрослым достаточно редко является учитель — поскольку именно в этом возрасте, по норме современного образования, начинает преобладать формально-теоретический подход, в котором знания и способы деятельности заведомо не связаны с практическими жизненными интересами подростка. Поэтому именно в подростковом возрасте принципиально значимым становится дополнительное образование, направленное на освоение культурного содержания через включение (хотя бы и игровое) в реальные взрослые практики и общение с взрослыми, представляющими такие практики.

В этом возрасте детская спонтанность, любознательность, игры воображения начинают оформляться в *одаренность*, еще не как способность к определенной деятельности, но как *готовность* к освоению сложного содержания, поиску нетривиальных тем и решений. Можно предполагать, что на формирование одаренности влияют как социальное и культурное окружение, так и особенности образовательного опыта, позволившие этим детским качествам сохраниться и развиться, при одновременном освоении культурного материала и культурных способов деятельности.

Можно выделить основные параметры этой готовности:

- *Воображение*. Готовность представить себе то, чего раньше не было, но что равно необходимо для художника, инженера-разработчика, предпринимателя.
- *Определяющая рефлексия*. Готовность выделить задачу, различить известное и неизвестное, ограничить собственные возможности и выделить направления, по которым ограничения преодолевать необходимо.
- *Концентрация*. Готовность долго удерживать свое внимание и волю на решении одной задачи, в совокупности с определяющей рефлексией позволяет определять приоритеты решаемых задач, а в совокупности с воображением позволяет определить значимость решенных задач с точки зрения будущего.

Предпочтительными формами открытого дополнительного математического образования для детей данного возраста можно считать:

1. Пробно-исследовательские проекты, реализуемые на любом или почти любом исследовательском материале, но в рамках задач, требующих точного исчисления, результаты которого заведомо будут далее использоваться в производственном процессе, матема-

тического моделирования, систематизации численных значений, соотносящихся с реально значимыми процессами и явлениями.

2. Подростковые математические клубы, в которых основной деятельностью является решение сложных задач, опирающихся на реальные практические сюжеты, требующие исчисления, численного структурирования, численного моделирования, а также коммуникация между участниками, позволяющая активизировать и реализовать свое воображение.

*Nota bene!* — важно, чтобы достижения, признаваемые в клубах данного типа, а также обуславливаемый ими статус в микросоциуме, были содержательно-генетически связаны именно со сложностью задач и точностью, оригинальностью, эффективностью предлагаемых способов их решения. Это может касаться не только клубов, полностью тематически посвященных теоретической или прикладной математической деятельности, но и клубов, формально связанных с социальной или художественной активностью подростков, но позиционирующих использование сложных математических знаний в качестве необходимых условий для успеха проекта. Подобную связь легко выстроить в подростковых творческих объединениях, связанных с видео и музыкой, начиная от пропорционального построения кадра и освоения законов музыкальной композиции, заканчивая современными технологиями цифрового монтажа и цифровой обработки звука и сведения музыкальных композиций. Однако умелый педагог, сочетающий способность к деятельностной организации преподавания математики с компетенциями воспитателя, легко сформирует и интерес к математике, и мотивацию к ее изучению, а также обеспечит освоения ряда ее разделов в ходе организации социальной активности своих подопечных. Здесь тоже возможны и в равной степени эффективны различные подходы: начиная от предложения рассчитать и математически смоделировать результаты социального проекта, исходя из плана действий и различных комбинаций приводящих факторов, заканчивая акцентированием прикладных задач, требующих расчетов и свойственных большинству социальных проектов (например, расчет расходов на их реализацию, в том числе оценка стоимости нефинансовых вкладов).

3. Творческие проекты подростков, предполагающие работу с математическим знанием для создания эстетически совершенного или инженерно-оптимального продукта (при условии, что продукт в результате действительно создается и представляется потенциальным потребителям, а также, что с его автором проводится ре-

флексия по поводу освоенного и закрепленного математического знания).

4. Математические игры и квесты, в которых главную роль играет возможность проявить собственную математическую способность. Данные игры и квесты могут реализовываться на различном материале: от ориентирования в пространстве города и поиска в этом пространстве решений математических задач, как спрятанных в каком-либо тайнике, так и представленных в городском пространстве (таким решением может быть, например, конкретный объект, описанный в виде математической модели в изначальном задании) — до настольных игр экономического или стратегико-политического характера, типа «Монополии» или «Колонизаторов». С точки зрения мотивации подростков, важно, чтобы материал, на котором строится игровое действие, во-первых, был ярким, привлекательным, выводил за пределы повседневности; во-вторых, предполагал бы возможность реальных достижений, самостоятельно обеспечиваемых подростками; в-третьих, предполагал как следование игроком внешне установленным нормам, так и самостоятельное конструирование и задавание этих норм самими игроками (особенно эффективно, если эти задаваемые нормы будут опираться на математические представления подростков). При этом важно, чтобы каждый этап игры или квеста сопровождался рефлексивными процедурами, позволяющими подросткам самим выделить логику и способ действий, за счет которых они выполнили задание или которые помогли бы его выполнить, если бы были использованы, и на этой основе — оформить или актуализировать для себя представления из теоретических или прикладных разделов математических дисциплин. В условиях специально организованного рефлексивного сопровождения игрой, формирующей и усиливающей математические способности, может быть павильонная сюжетно-ролевая игра, в ходе которой участникам необходимо выяснить, кто может быть их союзником, а кто является врагом, при изначальном неведении об этом и, соответственно, необходимости не только собрать информацию, но и структурировать ее и выстроить на этой основе модель ситуации. (Классической образовательной сюжетно-ролевой игрой данного типа является «Королевский суд», где все участники, не исключая короля, замешаны в тех или иных преступлениях, но никто не знает о преступлениях своих врагов, а знают о них лишь те игроки, которые по условиям изначально нейтральны к данным персонажам. Задача игроков — построить математиче-

скую модель распределения информации и на основе этой модели выяснить, кто может обладать важными для них сведениями.)

### **3.1. Юношеский возраст**

Основное содержание: предметный мир становится поводом, материалом, источником инструментов для собственных действий в мире человеческих отношений. В этом возрасте человек впервые *определяет себя* в отношении к возможной профессии (или спектру профессий), стилю жизни и будущей жизненной стратегии, системе приоритетов и условий осуществления этих приоритетов.

Совместная деятельность либо сворачивается в сложно организованный внутренний мир и деятельность, направленную на управление внутренним миром с его возможными позициями и персонажами, либо разворачивается в деятельность управления, в том числе в организацию исследований, проектирования, творчества.

В этом возрасте человек одновременно готов превратиться в машину, четко выстроенную для решения определенных задач, и попытаться осмыслить все возможные функциональные машины, в которые он может включиться, в том числе за счет интереса к решению определенного типа задач и профессионализации в их решении.

Дополнительное образование в этом возрасте должно быть условием уже не для проб, но для определения себя, в том числе через понимание собственных ограничений, отсутствие или принятие образа долженствования, идентификации себя с определенным делом и уже освоенным опытом<sup>19)</sup>.

Формы продуктивной деятельности в юношеском возрасте, в отличие от подросткового, должны опираться не на предложенные взрослыми задачи, сюжеты и темы, но на собственные. Дополнительные образовательные форматы должны включать в себя как обоснование выбранных направлений деятельности, так и анализ достижений из внешней позиции, позиции пользователя или эксперта от имени культуры. В частности, в случае с исследовательскими проектами — экспертами от имени объективного научного знания и нормы его появления.

В этом возрасте одаренность из чистого потенциала разворачивается в компетенцию, понимаемую как единство способности,

---

<sup>19)</sup> Именно в этом возрасте человек может сказать: *я — математик*. Или: *я — инженер*. И поставить себе задачу освоения дополнительных знаний и способов, позволяющих стать математиком или инженером.

как источника способов мышления и деятельности, и готовности, уже как волевого аспекта действия [30].

В этом возрасте одаренность проявляет себя как:

- *Коммуникабельность*. Способность и готовность определять речевое намерение в устной и письменной коммуникации, строить тексты, соразмерные предмету высказывания, и понимать тексты; желание высказываться, желание понимать.
- *Продуктивность*. Способность и готовность анализировать проблемные ситуации, моделировать схемы деятельности, строить заведомо не существующие или неизвестные схемы деятельности и действовать по этим схемам; претензия на появление принципиально нового содержания, на собственные научные открытия и инженерные изобретения.
- *Ситуативная рефлексия*. Способность и готовность видеть ситуацию в целом, собственное место и места, занятые иными участниками ситуации; выделять способ действия и границу его применимости; думать за других участников ситуации. В зависимости от личностных особенностей и установок — особая отрешенность ученого либо развитая чувствительность к чужим состояниям, вплоть до помещения себя в переживания и мысли другого человека как собственные.

Очевидно, что ученики, обладающие такими особенностями, как в подростковом, так и в юношеском возрасте не вполне вписываются в образовательные институты, в которых преподавание основных научных дисциплин, в первую очередь математики, основано на формально-теоретическом подходе.

*Именно из них могут вырасти сильные ученые и конструкторы; но поэтому для развития их способностей и поддержки, хотя бы в виде создания социальной среды продуктивного действия и обеспечения достаточным объемом задач для упражнения возможности открытия новых способов, необходимо особенное дополнительное образование.*

Предпочтительными формами открытого дополнительного математического образования для детей данного возраста можно считать:

1. Проведение старшеклассниками полноценных математических исследований как теоретического, так и прикладного характера, предполагающих либо новую интерпретацию имеющихся в науке знаний, либо построение на основании имеющихся знаний новую, ранее не существовавшую объяснительную модель для определенного типа ситуаций и явлений, либо решение задачи, кото-

рая ранее не была решена, либо, в предельном случае, разработка нового способа построения математического рассуждения и объясняющего действия. При любом варианте принципиально, чтобы результаты исследований имели реальное научное или прикладное значение и могли использоваться в ходе практической деятельности внешними субъектами (оптимально, если это будет конкретный заказчик, представленный ученикам и состоящий с ними в коммуникации).

2. Индивидуальные образовательные траектории и программы в рамках освоения математической науки, притом как разделов, входящих в программу общеобразовательной школы, так и выходящих за ее пределы, значимых для старшеклассника либо в мировоззренческом плане, либо с точки зрения профессионального самоопределения и подготовки к получению вероятной профессии.

3. Творческие, социальные и инженерные проекты, востребующие математическое знание в качестве ресурса для своей реализации. В отличие от аналогичных проектов, эффективных для подросткового возраста, важно, чтобы проектная задача, условия ее решения, «внешние» условия реализации проекта объективно требовали не просто использовать готовый математический инструментарий (метод вычисления или моделирования, метод статистической обработки данных, комбинация цифровых аудио- или видео-эффектов, опирающаяся на определенные алгоритмы преобразования звука или изображения, и т. п.), но скомпилировать его или, в предельном случае, самостоятельно разработать.

4. Математические клубы, посвященные преимущественно содержанию и смыслу «сложных» математических задач, имеющих в равной степени прикладное и общемировоззренческое значение. В этом смысле педагог, обеспечивающий работу подобного клуба, должен удерживать связь между конкретными соотношениями, заданными в практической ситуации, которые участникам предстоит выявить, чтобы успешно разрешить эту ситуацию, и соответствующими им «идеальными» соотношениями, имеющими всеобщий мировоззренческий смысл, — и обеспечивать понимание и осмысление этой связи учениками.

5. Математические квесты, предполагающие решение конкретной задачи, которая либо носит «интригующий» характер, либо имеет прямой и очевидный практический смысл, такой, что решение данной задачи символически приравнивает подростка к представителю профессионального сообщества. Характер задач и усло-

вия их решения должны быть такими, чтобы побуждать участников квеста максимально использовать имеющиеся представления и положений математической науки, в том числе комбинировать их, переосмысливать, применять к анализу ситуаций, которые ранее не соотносились с данными аналитическими инструментами. В ряде случаев компонентом квеста может быть проведение старшеклассниками собственных математических изысканий, связанных с появлением принципиально новых знаний.

б. Квесты и тренинги, предполагающие использование сложных математических представлений для моделирования вопросов, связанных с построением собственной жизненной траектории, в том числе расчета «собственной капитализации», моделирование возможных жизненных траекторий с учетом различных комбинаций привходящих факторов, прогнозирование собственной профессиональной карьеры исходя из данных о динамике востребованности различных профессий и спроса на рынке труда.



## Глава 3

### **Типы и формы открытого образования в области математики**

Переходя к анализу конкретных, наиболее выигрышных форм открытого образования, обеспечивающих формирование математических способностей, стоит еще раз оформить и обобщить основные аспекты открытого образования как кластера образовательных практик, позволяющие организовывать освоение предметных дисциплин на высоком уровне.

Напомним, что изначально открытое дополнительное образование формировалось как над- меж- и метапредметная образовательная деятельность, где главной была растяжка и одновременно связь между индивидуальной образовательной траекторией ученика и пространством его продуктивной активности — познавательной, исследовательской, социальной и социокультурной, пробно-профессиональной (при учете, что это пространство содержит в себе или порождает сюжеты и поводы для конкретных содержательно организуемых актов деятельности). Однако отсутствие привязки к конкретным предметам или использование соответствующих им знаний разрозненно и ситуативно, привело ряд практик открытого образования к опасности утратить связь с действительностью и превратиться в форму абстрактного фантазирования подростков и старшеклассников о своей будущей жизненной траектории, каковая, в силу абстрактности, окажется обречена на неудачу. С другой стороны, падение уровня преподавания отдельных учебных предметов, соотносящихся с научными дисциплинами и общественными практиками, объективно обусловленное несоответствием традиционных форм и методов с современными формами порождения, использования, преобразования нового знания, начало лишать те практики открытого образования, которые позиционировались как *надпредметные*, рефлексивные или функционально-операциональные по отношению к предмету, необходимого базиса. Базис оказалось также необходимо восстанавливать средствами открытого образования.

Основными аспектами открытого образования, выигрышными с точки зрения преподавания конкретных учебных предметов, можно считать:

- системно-синтетический подход к знанию — заведомое соотнесение конкретного предметного материала с другими, потенциально или актуально связанными с ним единицами материала, как в рамках данного предмета, так и в рамках других дисциплин, содержательно смежных или используемых одновременно и во взаимосвязи, для решения определенных типов и кластеров задач; в целом — рассмотрение предметного знания в объемлющем контексте, в качестве неотъемлемой части общей системы представлений о мире, чье место в этой системе имеет строгие объективные основания;
- «генетический», деятельностный подход к знанию — работа с ним не как с данностью, но как со специально оформленным, интерпретированным и поданным представлением о некоем аспекте или секторе реальности, появление которого, в «готовом» виде необходимо реконструировать и понять, чтобы эффективно использовать;
- функциональный подход к знанию — каждая единица знания ценна в конкретном контексте употребления (от построения картины мира до решения конкретной сиюминутной практической задачи), и именно контекст употребления задает, с одной стороны, мотивацию к получению знания, а с другой стороны, позволяет выстроить процесс познания максимально эффективно с точки зрения особенностей и задач познающего субъекта, в том числе требует заведомого структурирования и оформления этого знания; в целом работа со знанием привязывается к индивидуальной образовательной и в целом жизненной траектории ученика;
- заведомое многообразие источников знания, которые ученик должен освоить и далее, при помощи наставника или тьютора, самостоятельно сконструировать целостную модель изучаемого им сегмента или аспекта действительности.

Исходя из перечисленных выигрышных аспектов открытого образования в контексте преподавания конкретных учебных предметов можно сформулировать базовые требования к организации предметной программы в рамках этого типа образовательных практик:

- программа должна быть связана с решением конкретной задачи, возрастно-сообразной по своему материалу, конкретной

формулировке и условиям решения, но в любом случае заведомо субъективно значимой для учеников, с очевидным контуром употребления результатов решения или самого факта решения учениками в собственной жизни и деятельности;

- программа должна носить деятельностный характер на всех этапах ее реализации и на всех уровнях работы с конкретным научным знанием: от оснований для познавательной деятельности — до систематизации представлений и построения целостной знаниевой модели, а также до разработки и апробации методологии работы со знанием данного типа; при этом ученики должны *извлекать* и *оформлять* знание из его источников, в том числе проводя особую работу по изысканию самих источников, а не получать знание в готовом виде заведомо понятным институционализированным способом;
- программа должна иметь продуктивный характер: результатом должен быть отчуждаемый продукт, потенциально востребованный и пригодный для использования людьми, не имеющими отношения к его созданию, в игровом или реальном контексте использования (от описания модели собственных действий, связанных с оперированием математическими знаниями и их практическим применением, до представления научно значимых открытий);
- программа должна предполагать деятельность педагога в качестве наставника и координатора, организующего для ученика мотивирующие ситуации и затем обсуждающего с ним возможные планы и проекты действий в данной ситуации; в отдельных случаях — консультанта и информатора; но в любом случае не транслятора целостных систем знания в готовом виде, а прежде всего носителя методологии оформления этого знания, которую «из» него, как из любого другого источника, подопечные должны суметь извлечь.

В наибольшей степени данным требованиям соответствуют следующие образовательные формы (в большинстве своем обозначенные выше при обзоре возрастно адекватных и сообразных форм открытого дополнительного образования, формирующих математические способности):

- *интенсивная школа* (в разбросе конкретных вариантов реализации от пришкольного лагеря каникулярного времени, действующего в первой половине дня, до сложно организованного

целостного процесса детско-взрослой пробно-практической деятельности, проходящей в специально смоделированных «институциональных» условиях, в режиме погружения в летнем оздоровительном лагере или на базе отдыха);

- *курсы по выбору (элективные курсы)*, организованные деятельностным способом, содержание и формы работы которых формируются исходя из персональных исследовательских интересов участников, как актуализированных, так и потенциальных, объективируемых и активизируемых педагогом;
- *образовательные клубы* как формы одновременно коммуникации и взаимоотношений между учениками и педагогами по поводу предметного материала, а также по поводу задач, связанных с ним и вытекающих из него; и формы соорганизации для решения конкретных задач, связанных с математическим материалом;
- *учебные проекты*, связанные с решением конкретных исследовательских или практических задач, в сфере математики или с использованием математических средств как критически важных инструментов; сопровождаемые педагогом, который обеспечивает оформление результатов проекта и полученного опыта в виде структурированных и функционально используемых личностных «инструментов» (знаний и компетенций);
- *образовательные игры и квесты*, требующие для достижения успеха (выигрыша или достижения игровых целей) применения математических знаний, в том числе их комбинирования, переосмысления, в ряде случаев — специального получения исследовательским способом.

Ниже мы даем подробное описание особенностей форматов интенсивных школ, элективных курсов, клубов как форм открытого дополнительного математического образования. Учебные проекты школьников и образовательные игры и квесты на сегодняшний день недостаточно описаны как образовательные форматы с точки зрения условий их реализаций, возможностей и функций при реализации целостной образовательной траектории. Кроме того, зачастую они являются компонентами реализации интенсивных школ, деятельностно организованных элективных курсов и образовательных клубов как объемлющих содержательно-организационных целостностей.

### **Интенсивные школы**

Наиболее продуктивны как практика дополнительного образования. Позволяют:

- обеспечить равную доступность качественного образования для детей, подростков, старшеклассников из разных территорий (в том числе удаленной сельской местности с низкой транспортной связностью, детских домов и иных редуцированных жизненных и культурных сред), с определенными образовательными запросами;
- поместить участников в социальные и культурные формы, в которых именно их способности и вытекающие из этих способностей жизненные ориентиры и притязания являются наиболее приемлемыми и поощряемыми<sup>1)</sup>;
- обеспечить интенсивное проживание современных форм продуктивной деятельности, связанных с актуализацией, развитием и применением способностей; в случае с математикой — полевые исследования, технические разработки, решение сложных задач, требующих математического моделирования, в том числе численного моделирования и программирования<sup>2)</sup>.

Но интенсивные школы являются также и наиболее дорогими:

- издержки на проезд, проживание и питание участников, в том числе из отдаленных территорий, на оборудование и инфраструктуру<sup>3)</sup>;
- издержки на привлечение высококвалифицированных специалистов, как ученых, так и специалистов по организации содержательного культурного досуга;
- затраты на разработку образовательных программ; даже если они строятся по типовым схемам [21], в любом случае необходима адаптация программы к месту проведения, к особенностям

---

<sup>1)</sup> Включая совместное чтение и обсуждение сложных текстов, просмотр не массовых фильмов, демонстрирующих образ и стиль жизни, и *разговоры про умное*, в которых известный ученый может общаться со школьником на равных.

<sup>2)</sup> Например, на основе ГИС построить карту конкретной территории; реконструировать динамику цен на ремень и черемшу на фоне общих экономических процессов и стоимости потребительской корзины; рассчитать полет ракеты до Луны, отдельно для советских лунников, отдельно для проекта «Аполлон».

<sup>3)</sup> В этом отношении именно *математические* интенсивные школы наиболее дешевы, требуют затрат только на доски и мел, в максимальном случае — на аренду компьютеров, электропроводку и Интернет (в сравнении с программами по физике, химии, биологии).

целевой аудитории, к особенностям состава приглашенных специалистов; и, что наиболее важное, — для того чтобы основной состав педагогической команды, проводящей программу, мог поддерживать тонус и не терять интереса, не превращаться в школьных учителей, из года в год повторяющих одну программу, необходимо, чтобы обновлялись содержательные задачи.

### **Элективные курсы**

Элективные курсы в условиях профильной школы позволяют удобно упаковать программы интенсивных школ для подросткового и младшего юношеского возраста — но без соответствующих организационных и материально-финансовых издержек [28].

В отличие от интенсивной школы, где образовательное содержание может быть в равной степени представлены заданиями, составом преподавателей, организацией уклада (то есть как учебной деятельности, так и жизни вне учебного процесса), в элективном курсе образовательная задача должна задавать:

- *тему*, сформулированную в виде общезначимого противоречия, с указанием на возможные предметные области, которые позволяют сформулировать и разрешить это противоречие<sup>4)</sup>;
- *последовательность шагов*, позволяющих выйти из противоречия в продуктивное действие: оформление проблемы, выделение содержательных задач в рамках общей проблемы; формирование версий решений задач; обнаружение содержательных дефицитов и поиск источников, позволяющих решить задачи; обнаружение частных решений.

При наличии достаточного количества сходных задач на уровне муниципальной или региональной системы образования может быть запущена олимпиада, по схеме близкая к олимпиаде Развивающего Обучения, но ориентированная на более старший возраст, на большее владение научным предметным знанием и способами деятельности.

Но элективные курсы (особенно при их совмещении в новое олимпийское движение) требуют больших затрат на разработку в сравнении с интенсивными школами:

---

<sup>4)</sup> Например: *точка — это математическое понятие; зрение описывается законами как физики, так и биологии; возможно ли построить точное научное понятие точки зрения? В идеале — построить исчисление точек зрения, сопоставимое с алгеброй, позволяющее соотносить разные точки зрения в одном пространстве.*

- необходимо компенсировать отсутствие значимых носителей предметного знания квалификацией преподавателя, ведущего такой элективный курс, учебными текстами и методическими разработками;
- необходимо компенсировать отсутствие целостного уклада формами организации взаимодействия внутри курса, между учениками и преподавателем;
- необходимо удержать временную динамику, случающуюся в условиях интенсивной школы естественным образом, искусственно, через возможность восстановить контекст нового шага для каждого следующего шага после временного разрыва.

### **Клубы**

Клуб (или, в старой терминологии, *кружок*) можно считать *минимальной* формой дополнительного образования, ориентированной на предметность и могущей работать на поддержку (но на формирование) способности.

Клуб как не обязательная форма деятельности привлекателен заведомо тем, кто руководствуется своими интересами, выходящими за пределы повседневных обязательств и требований<sup>5)</sup>.

Математический клуб в этом качестве может считаться предельной формой бескорыстия и беспредметности — в особенности если это клуб любителей книг или фильмов, из которых можно выделить математическое содержание, клуб решателей задач определенного типа (в том числе олимпиадных).

Но в то же время математический клуб может быть развернут, начиная с начальных классов, в:

- *Клуб реконструкции математических сюжетов*, восстанавливающий математические задачи из художественной литературы либо кинематографа (в том числе задачи не очевидные и не тривиальные)<sup>6)</sup>.

---

<sup>5)</sup> Так, клубы филателистов и любителей аквариумных рыбок никак практически не связаны с какой-либо пользой. Даже возможность продажи редких марок или рыбок основывается на том, что есть люди, готовые бескорыстно тратить деньги на редкость или красоту.

<sup>6)</sup> Классический пример такой задачи — расчет контура вращения варенья внутри Карлсона, стабилизирующего поворотный момент от вращения винта, с поправкой на инерционный момент, создаваемый комплекцией Карлсона. Дополнительно можно оценить эффективность варенья в качестве топлива для мотора в сравнении, например, с бензином.

- *Исследовательский клуб*, включающийся в сетевые сообщества научных обществ учащихся. Такие клубы могут строиться как вокруг задач, связанных с эстетикой математики (но тогда они будут, скорее всего, воспроизводить уже известные результаты), так и с решением прикладных задач на местности<sup>7)</sup>.
- *Клуб участников сетевой игры*, обсуждающий правила игры, закономерности игрового мира и устройств, присутствующих в игровом мире, устраивающий внутренние соревнования и оценивающий их результаты в том числе по тому, кто из участников как может оценить математические закономерности мира.
- *Клуб любителей логических игр и головоломок*, где принципиально не само по себе разгадывание головоломок как увлекательная интеллектуальная игра, но и описание схем рассуждений, позволяющих эффективно разгадывать головоломки.

Здесь принципиально важно:

- педагог, организующий клуб, должен быть компетентен одновременно в необходимой математике и в предметной действительности, по поводу которой строится клуб;
- в частности, ввиду актуальности сетевых игр для современных подростков, педагог сам должен быть если не фанатом, то любителем таких игр и уметь заразить подопечных своим энтузиазмом<sup>8)</sup>;
- либо при организации исследовательской группы педагог должен быть сам любознателен и заинтересован в результате исследований, а не только в выполнении формальных требований<sup>9)</sup>.

---

<sup>7)</sup> Для школьников из крупных городов одной из самых актуальных задач полевого исследования является, по-видимому, задача транспортной логистики и оптимизации трафика; ясно, что расчеты школьников муниципалитеты, скорее всего, не примут, но для самих школьников полезно будет посчитать, почему есть смысл ездить в определенное время по определенному маршруту.

<sup>8)</sup> Например, пониманием, что «Цивилизация Сида Мейера» — это не непрерывные сражения, а расчет экономики, баланса гуманитарных и технологических открытий и довольства нации, из которых следуют в том числе победы в сражениях.

<sup>9)</sup> Как показывает практика, от оформления исследовательских работ школьников требуется соблюдение последовательности «актуальность — проблема — гипотеза — цель» и так далее. Это характерно для выпускных квалификационных работ и диссертаций по педагогике. Для оформления иных работ это не характерно, так, по частным наблюдениям большинство филологических работ начинаются с *известно, что*, а большинство математических работ начинаются с *пусть*. В то же время прикладные работы начинаются, как правило, с фиксации: *мы заметили; обнаружили эффект; и решили объяснить; почему*.



## **Общие выводы**

Мы рассматриваем математические способности как:

- возможность выделить формальную структуру ситуации, различить известное и неизвестное, построить связи и отношения известного и неизвестного;
- для этого использовать формальный аппарат, аксиоматику и язык, позволяющий моделировать ситуацию как набор идеальных объектов с известными свойствами и отношениями;
- на основе известных свойств и отношений идеальных объектов найти неизвестные величины и отношения, возможно, обнаружив новые свойства, сформулировав и обосновав их<sup>10</sup>).

Для того чтобы работать с этими способностями, педагог должен:

- иметь собственный опыт движения от ситуации к ее моделированию, формальной постановке задачи и ее решению (вплоть до обоснованной закономерности и ответа в виде найденного количества, фигуры или схемы) и вкус к мышлению такого рода;
- быть энтузиастом, уметь радоваться новой задаче и уметь транслировать эту радость ученикам с обоснованием того, почему эта задача интересна и чем ее решение может быть полезно как практически, так и для развития (или приведения в порядок) ума;
- уметь признавать ученика не менее умным и сообразительным, чем учитель, и соответствующим образом строить формы продуктивного обсуждения, сохраняя свой авторитет в качестве носителя знаний и того, кто умеет управлять коммуникацией.

---

<sup>10</sup>) Известно, что все наиболее интересные теоремы, описывающие всеобщие свойства математических объектов, рождались из решения прикладных задач. От теоремы Пифагора, обосновывающей «египетский треугольник» как инструмент построения прямого угла, до теоремы Коши—Пикара об условиях существования и единственности дифференциального уравнения, появившейся из задачи предсказания движения планет и инсайта И. Ньютона («Законы природы описываются дифференциальными уравнениями») [1], и аналогичных, куда более сложных теорем существования и единственности.

Используемые образовательные формы должны:

- не только допускать, но требовать и поощрять активность собственного ума ученика в поиске нетривиальных решений;
- позволять прямую конкуренцию не только учеников между собой, но и учеников с учителем в изобретательности, конструировании решений и их обосновании;
- задавать приоритет самооценки над экспертной оценкой результата, с подробным разбором достижений и ошибок при решении задачи.

Для конструирования продуктивных образовательных форм необходимо:

- понимать последовательность задач, позволяющих освоить тип математического рассуждения и, возможно, необходимый тип формализма (в зависимости от установки на занимательность, освоение общей математической грамотности, профессионализацию в самой математике или областях ее применения);
- понимать противоречия, способные спровоцировать учеников разного возраста и с разными установками интерес к исследованию ситуаций и превращению их в математические задачи, уметь выстроить интригу;
- уметь импровизировать, не ограничиваться лишь известными образовательными формами, но конструировать их на основе понимания возрастных особенностей учеников, спектра их приоритетов, амбиций и жизненных стратегий (в подростковом и юношеском возрасте), одновременно удерживая содержание математики как особенную культурную ценность и математику в целом как особенный тип мышления.

*Независимо от того, кому и как в жизни повезло или не повезло с учителями математики, рекомендуем обратить внимание на учителя Таратара из цикла «Приключения Электроника» Евгения Велтистова и экранизации этого цикла.*

## ***Литература и источники***

### **Литература**

1. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1986.
2. *Вертгеймер М.* Продуктивное мышление. М.: Прогресс 1987.
3. *Вернан Ж.-П.* Происхождение древнегреческой мысли. М.: Прогресс, 1988.
4. *Галилей.* Диалог о двух главнейших системах мира, Птолемеевой и Коперниковой. М.—Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948.
5. *Гейзенберг В.* Шаги за горизонт. М.: Прогресс, 1986.
6. *Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. Основание информатики. М.: Мир, 1998.
7. *Давыдов В. В.* Теория развивающего обучения. М.: ИНТОР, 1996.
8. *Декарт Р.* Правила для руководства ума // Декарт Р. Сочинения. Т. 1. М.: Мысль, 1989.
9. *Деменюк С. Л.* Фрактал: между мифом и ремеслом. СПб.: Академия исследования культуры, 2011.
10. *Дусавицкий А. К.*  $2 \times 2 = ?$  М.: Знание, 1986.
11. *Ермаков С. В.* Генезис структуры математического доказательства // В Сб.: Педагогический ежегодник: Сборник научных работ / Под ред. А. М. Аронова. Красноярск: Красноярский государственный университет, 1995.
12. *Кант И.* Пролегомены ко всякой будущей метафизике, которая может появиться как наука // Кант И. Сочинения в 8 тт. Т. 4. М.: ЧОРО, 1994.
13. *Крылов А. Н.* Значение математики для кораблестроения // Крылов А. Н. Мои воспоминания / Составители: Н. И. Барбашев и С. А. Шерр. М.: Издательство Академии наук, 1963; 9-е изд., испр. и доп.: М.: Лепант/URSS, 2016.
14. *Лакатос И.* Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы. М.: Наука, 1967.
15. *Левина Л. А., Сагир Г. И.* Приключения Кубарика и Томатика, или веселая математика. М.: Детская литература: 1975.

16. *Лейтес Н. С.* Возрастная одаренность и индивидуальные различия. М.—Воронеж: МОДЭК, 1997.
17. Летние школы. Организация. Обучение. Воспитание // Межвуз. сб. / Под ред. О. В. Бытева. Красноярск: Красноярский государственный университет, 1988.
18. *Левшин В.* Фрегат капитана Единицы. М.: Детская литература, 1979.
19. *Левшин В.* Магистр рассеянных наук. Математическая трилогия. М.: Детская литература, 1987.
20. Начала Евклида. Пер. с греч. и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского При редакционном участии И. Н. Веселовского и М. Я. Выгодского. М.—Л.: Государственное технико-теоретическое издательство, 1949—1951.
21. Открытая модель дополнительного образования региона / Науч. ред. А. А. Попов, И. Д. Проскуровская. Красноярск, 2004.
22. *Перельман Я. И.* Занимательная алгебра. М.: Наука, 1967.
23. *Пиаже Ж.* Генезис числа у ребенка // Пиаже Ж. Избранные психологические труды. М., 1994.
24. *Платон.* Тээтет // Платон. Соч., т. 2. М.: Мысль, 1993.
25. *Платон.* Государство // Платон. Соч., т. 3. М.: Мысль, 1994.
26. *Платон.* Тимей // Платон. Соч., т. 3. М.: Мысль, 1994.
27. *Пойа Д.* Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975.
28. *Попов А. А.* Образовательные программы и элективные курсы компетентностного подхода / Предисловие В. А. Болотова, сост. М. С. Аверков, С. В. Ермаков. М.: Ленанд/URSS, 2017.
29. *Попов А. А., Ермаков С. В.* Культурно-историческая теория Л. С. Выготского и третье поколение антропо-практик развития // В сб.: Материалы XX научно-практической конференции «Практики развития: современные вызовы». Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2014.
30. *Попов А. А., Ермаков С. В., Реморенко И. М.* Проект «Оценка компетентностных результатов и достижений» // В сб.: Открытое образование как практика самоопределения. М.: Некоммерческое партнерство «Авторский клуб», 2015.
31. *Розин В. М.* Логико-семиотический анализ знаковых средств геометрии (к построению учебного предмета) // Педагогика и логика. М.: СП «Касталь», 1993.
32. *Смаллиан Р.* Принцесса или тигр? М.: Знание, 1978.
33. *Смаллиан Р.* Как же называется эта книга? М.: Знание, 1981.
34. *Стройк Д. Я.* Краткий очерк истории математики. М.: Наука, 1984.
35. *Фейнман Р.* Вы, конечно, шутите, мистер Фейнман! М.: Астрель, 2012.
36. *Щетников А. И.* Пифагорейское учение о числе и величине. Новосибирск: Артель «Напрасный труд», 2001.

37. *Энгельс Ф.* Анти-Дюринг. М.: Издательство политической литературы, 1987; 2-е изд. М.: Ленанд/URSS, 2016.
38. Энциклопедический словарь юного математика / Сост. Савин А. П. М.: Просвещение, 1989.

### **Источники**

39. *Берд Киви.* «4исла со смыслом» // Компьютерра, № 12, 2007.  
<http://old.computerra.ru/316706>
40. *Воронцов А. Б.* Международная олимпиада Развивающего Обучения как лаборатория по моделированию новых подходов к содержанию и построению образовательного процесса.  
[http://nsc.1september.ru/view\\_article.php?id=200801503](http://nsc.1september.ru/view_article.php?id=200801503)
41. Всероссийская математическая олимпиада для учащихся 8 классов.  
[http://mat.1september.ru/view\\_article.php?ID=200901502](http://mat.1september.ru/view_article.php?ID=200901502)
42. Кенгуру: математика для всех.  
<http://mathkang.ru>
43. Международная математическая олимпиада.  
<http://www.imo-official.org>
44. Московская математическая олимпиада.  
<http://mathus.ru/olymp/mmo.php>

Приложение  
***Результаты анализа практик  
дополнительного образования,  
направленных на развитие  
математических способностей  
обучающихся, на основе материалов,  
представленных субъектами РФ\****

**1. Методология организованного анализа  
представленных субъектами Российской  
Федерации описаний практик дополнительного  
образования, направленных на развитие  
математических способностей обучающихся**

Убрали "А"  
из названия  
приложения,  
поскольку  
приложение  
в книге одно

В данном тексте представлен аналитический обзор успешных практик дополнительного образования, направленных на развитие математических способностей обучающихся. Целью данного анализа являлось определение тех практик, опыт реализации которых может быть тиражирован в масштабе страны и воспроизведен в системах дополнительного образования разных субъектов РФ. Забегая вперед, стоит обратить особое внимание на то, что те практики, которые были признаны в результате анализа как успешные и потенциально готовые к тиражированию опыта, должны быть подвергнуты в дальнейшем дополнительной интерпретации, так как тот или иной регион имеет свои собственные территориальные и социокультурные спецификации, оказывающие сопротивление при внедрении новых образовательных технологий и систем.

Задачи реализованного анализа заключались в следующем:

1. Произвести экспертную оценку представленных в заданной форме данных об успешных практиках в соответствии с рядом на-

---

\* Анализ практик дополнительного образования, направленных на развитие математических способностей обучающихся, на основе материалов, представленных субъектами РФ, был проведен Федеральным институтом развития образования.

правлений анализа, содержательное пояснение которых будет дано ниже в тексте.

2. На основании произведенной оценки определить сильные и уникальные стороны конкретных практик, обозначить слабые и недостающие стороны данных практик, определить риски, которые могут последовать при тиражировании опыта настоящих практик, а также определить перспективы их развития и направления дальнейшего совершенствования.

Анализ производился в соответствии со следующими направлениями:

1. Практикоориентированность. В рамках данного направления оценивалась предусмотренная в успешной практике непосредственная связь образовательного процесса с какой-либо деятельностью, напрямую или косвенно относящуюся к математической сфере знания (в т. ч. и прикладными видами данного знания). В рамках данного направления практика получает высокую оценку в том случае, если ее образовательный процесс подразумевает включение (в т. ч. и имитационно-моделирующими способами) учеников в процесс осуществления деятельности, требующей применения математического знания и обеспечивающей развитие соответствующих компетенций. Примерами могут служить включения детей в образовательные процессы, моделирующие инженерную деятельность, деятельность профессионального программирования, профессиональную научно-исследовательскую деятельность и т. д. Низкую оценку получали те практики, которые при реализации образовательного процесса не выходили за границы традиционно-учебной деятельности.

При этом практикоориентированность может подразумевать то, что организационный проект представляемой практики включает в образовательный процесс конкретных специалистов, практикующих ученых и потенциальных работодателей, имеющих прямое или косвенное отношение к сфере математического знания и его прикладного применения. Построение контактной, двусторонней связи учеников с представителями прикладных сфер математического знания — имеет большое значение для выявления лучших практик, направленных на развитие математических способностей обучающихся.

2. Реализация индивидуально ориентированных принципов, подходов и технологий. В рамках данного направления рассматривались аспекты практики, связанные с индивидуальным подходом

к ученикам. Высокую оценку получили те практики, которые предусматривают в рамках своей деятельности широкий и глубоко проработанный технологический пакет индивидуально-ориентированного инструментария. При этом допускается, что практика по своей сущности может быть ориентирована на работу с большими объемами учеников. В данном случае во внимание берется проработанность аспектов разноуровневости в отношении заданий, программ, содержания самой практики и т. д. Соответственно низкую оценку получали те практики, которые слабо учитывают индивидуальные особенности участников образовательного процесса либо не учитывают вовсе.

Под индивидуально ориентированными подходами также подразумевается наличие в практике разнообразия режимов освоения содержания, которые исходят из временных, интеллектуальных, психологических и прочих потребностей учеников.

3. Пространство авторского действия. Под данным направлением понимается наличие в успешной практике таких форматов, режимов работы и дидактических схем организации образовательного процесса, которые позволили бы участникам данной практики проявить собственные авторские инициативы, выработать и представить какой-либо авторский продукт. Здесь стоит отметить, что высокую оценку получили те практики, которые погружают детей в среду, ориентированную и поддерживающую какие-либо продуктивные виды деятельности в противопоставление репродуктивным.

В качестве примеров, иллюстрирующих данное критериальное направление, можно выделить использование технологии решения изобретательских задач, проектный метод, исследовательские разработки и прочее. Важно то, что такие практики должны быть ориентированы на получение какого-либо реального и значимого продукта, который мог бы быть оценен вне границ учебной работы и контрольных надстроек в ее отношении.

4. Электичность методов. Данное направление оценивает эффективную комбинацию разных методов работы в рамках деятельности представляемой практики. Другими словами, осуществляется оценка удачности или неудачности синтеза разных подходов, форм, режимов и методов реализации математического дополнительного образования. Стоит заметить, что данный критерий введен с целью распознавания нелинейности в тех практиках, которые претендуют на статус успешной. Дело в том, что современная ситуация (как социокультурная, так и общенаучная), которая характеризу-



ет современное образование, и в частности математическое, подвергает серьезной критике часто-традиционные методы обучения, реализующиеся в границах схемы линейной (однонаправленной) дидактики. В качестве аксиомы в рамках данного анализа мы закладываем то, что успешной практикой может называться та практика, которая направлена на нелинейную организацию учебной деятельности и стремящаяся к сложной и результативной комбинации разнообразных подходов и методов построения образовательного процесса.

5. Привлекательность практики. Данное направление рассматривает аспекты привлекательности практики вне границ отрасли образования. В этом смысле также рассматривается стремление организационно-управленческого коллектива к созданию специальных механизмов и форматов привлекательности, обеспечивающих дополнительное финансирование и привлечение дополнительных партнеров к данной практике. Такое рассмотрение является достаточно важным, в частности для математических направлений образования, так как прикладные аспекты рассматриваемой нами науки на настоящий момент испытывают определенные дефициты как с точки зрения кадров, так и наличия конкретных эффективных разработок по соответствующим тематикам.

Высокую оценку получили те практики, которые заведомо закладывают в организацию собственной деятельности построение связей с партнерами и внедрение средств привлечения дополнительного финансирования. Под партнерами понимаются не только образовательные организации, а в первую очередь представители бизнеса, корпораций, предприниматели, специалисты, практикующие прикладные области математического знания.

6. Использование информационных технологий. В рамках данного направления оценке подвергается составляющая практики, успешно использующая информационные технологии в математическом образовании. Высокую оценку получают те практики, которые смогли частично автоматизировать за счет дистанционного обучения те процессы, которые потенциально могли бы быть конвертированы в данный формат; реализовать идеи доступности и открытости за счет использования дистанционных форм обучения; обеспечить высокий уровень наглядности и применения нового поколения технологий моделирования за счет многообразия существующего (или созданного) программного обеспечения; смогли реализовать идеи индивидуализации через использование дистанционных форм обучения и прочее.

7. Глубина содержания. В рамках данного направления осуществляется оценка проработанности образовательного содержания практики в соответствии с заявленной тематикой, целями, задачами и актуальностью практики.

Здесь получают низкую оценку те практики, которые организовали свое содержание линейно (однонаправленно) или напрямую зависимо от какого-либо другого содержания. В этом смысле под практикой понимается тот процесс и область, которые имеют самодостаточное и нелинейное (распространяющееся на многообразие сфер деятельности человека) содержание, обеспечивающее полноценную возможность участнику данной практики поставить собственные практические цели, определить и применить средства по их достижению, а также осуществить масштабируемый комплекс практических действий.

8. Результативность. В рамках данного направления производится оценка показателей результативности и ключевых показателей эффективности представляемой практики. Данный критерий, как и другие представленные здесь критерии, не направлен на один конкретный раздел информационной карты практики, а применяется герменевтически, в отношении всего комплекса информации, представленной в отношении рассматриваемой практики.

Под высокой результативностью понимается не только наличие побед участников практики на разнообразных олимпиадах и соревнованиях, что, безусловно, является четким показателем, но и продуктивная результативность детей, наличие дополнительных инвестиций в практику также рассматривается как результативность; наличие заинтересованности потенциальных работодателей в выпускниках данной практики и т. д.

9. Сетевые построения. В рамках данного направления оценивается структура и масштаб сетевого взаимодействия практики, ее «проникание» в разные области деятельности, в которых востребовано математическое знание и соответствующие компетенции. Высокую оценку получают те практики, которые стремятся выстраивать образовательную сеть открытого характера. Открытые сети не выстроены как воспроизводство типовых элементов и инфраструктур в разных ее частях. Они объединяют разнородные и разнообразные элементы, разных людей с разным уровнем профессионального развития и степенью включенности в ту или иную практику. Такие сети решают две циклические задачи: во-первых, включение человека в практику, а во-вторых — ресурсное сопро-

вождение процесса становления человека в практике (становление его компетенции).

Важно заметить, что такое образование отказывается от идеи патронажа своих учеников, а работает с проявлением самостоятельности, инициативности и с процессом самоопределения. В этом плане человек попадает в избыточные пространства, где ему предоставляется доступ ко всему многообразию практических элементов и возможностей практикования. В рамках данного критериального направления также осуществляется оценка организации проектов педагогических позиций и их состава в рамках представляемой практики.

Далее в тексте будут представлены аналитические результаты по каждому из критериев в отдельности. Данные результаты ориентированы на выделение позитивных сторон представляемых практик, которые могли бы быть в дальнейшем усилены и распространены как успешный опыт в разных регионах Российской Федерации.

### 1.1. Аналитические результаты, представляемые по направлению «Практикоориентированность»

| Название практики   | Результат по направлению   |
|---|--|
| <p>Центр олимпиадной подготовки для школьников и студентов по математике и программированию</p> | <p>В рамках данной практики задействованы индивидуальные предприниматели и IT-компании. Таким образом, осуществляется совместное проведение олимпиад, что потенциально является элементом формирования кадрового резерва для данных компаний. В свою очередь, данные компании могут привлекать материал собственной деятельности в качестве образовательного материала для участников практики. Естественно подразумеваются околопрофессиональные стажировки. Все это свидетельствует о соответствии принципам практикоориентированности</p> |
| <p>«Детская научно-техническая школа»</p>   | <p>В рамках данной практики реализуются курсы, которые являются практикоориентированными, удерживают межпредметные связи и прикладную значимость математического образования. Также присутствует ознакомительный аспект, в т. ч. направленный на популяризацию математического знания (экскурсии и лектории)</p>   |
| <p>Проект «Математическое образование через учебно-исследовательскую деятельность»</p>          | <p>Примечательно то, что в данном проекте выстраивается связь учебно-исследовательской деятельности с астрономическими и астрофизическими сферами знания, что позволяет отразить прикладную сторону математического знания, где оно скорее выступает не как фундаментальная и самодостаточная единица, а как язык, на котором «говорят» представленные области</p>   |
| <p>Обнинская малая академия наук (педагогическое содружество «Афалина»)</p>                     | <p>В рамках данной «Малой академии наук» очень отчетливо математика представляется не просто как предмет или область знания, а именно как наука. В целом здесь наука рассматривается как специфическая практика, а ученый как практик. Стоит заметить, что мало кому удастся развернуть именно такое представление — о науке как практике. В большинстве случаев все ограничивается имитацией схем и воспроизводством базовых шаблонов-форм научного исследования. Представленная практика может рассматриваться как исключение</p>          |

| Название практики   | Результат по направлению   |
|---|--|
| Реализация дополнительного математического образования обучающихся начальной школы через систему творческих объединений (кружков) | Важно обратить внимание на то, что данная практика направлена на младших школьников. При этом математическое знание (а именно, способ обобщения) представляется как способ устройства (или элемент устройства) так называемого «повседневного» сознания. Т.е. математика представляется как практика повседневности, где находит свое место прикладная и практическая значимость   |
| Программа «Одаренные дети»  | В рамках данной программы примечательной особенностью является построение организационной схемы: школа—наука—вуз—договор. Данная схема воспроизводит принципы монологического кластера, который обеспечивает комплексную подготовку кадров. Данная особенность является примечательной потому, что подавляющее большинство практик, представленных для анализа, направлены на линейную и узкую подготовку только лишь к вузу. Здесь же есть потенциал для возникновения у участников долгосрочных образовательных стратегий, так как удерживается вся хронологическая линия (или базовая линия) становления в практике |
| Специальные курсы «Решение задач повышенной сложности по математике»  | Из данной практики можно почерпнуть методический опыт, так как представляемые в ней задания ориентированы на решение именно прикладных математических задач высокой сложности. Если удастся осуществить практическую апробацию полученных участниками решений, то сама схема и метод разработки таких заданий могут оказаться крайне полезными и нужными как для олимпиадных движений, так и для развития нового поколения практик математического образования   |
| Региональный фестиваль «РобоФест-НН» общероссийской Программы «Робототехника: инженерно-технические кадры инновационной России»   | В данной практике реализуется подобная схема удержания практической связи математики с прикладными областями, как и в «Центре олимпиадной подготовки для школьников и студентов по математике и программированию». В рамках данной практики строится взаимодействие не со специальностями «программирование», а с инженерными. Также строится взаимодействие с потенциальными работодателями в данной сфере деятельности   |

| Название практики   | Результат по направлению  |
|---|---|
| Система работы с одаренными учащимися                     | В рамках данной практики разворачивается концепция представления науки как практики при производстве (наукоемкое производство). Такие практики особо актуальны в моногородах с градообразующими предприятиями, в индустриальных регионах. Также отдельно можно выделить удержание междисциплинарных связей (например, математика—физика, математика—химия и т. д.)  |
| Совершенствование математического образования в лицее     | В рамках данной практики заявляется ориентация на инициацию у участников инженерных разработок и их представления. В связи с этим как особенная линия выделяется профориентация участников (на инженерные специальности соответственно)   |
| Курс «Основы проектной деятельности. Реальная математика» | Базовая практическая особенность данной практики заключается в том, что образовательный процесс в ней ориентирован на формирование технологической культуры у учащихся. Фактически, данное образовательный результат может быть рассмотрен как применимый для массовых успешных практик дополнительного образования по математическим направлениям либо как элемент узконаправленных практик  |
| Дистанционная физико-математическая школа                 | Данная практика только начала развернутую реализацию своей деятельности, но примечательной особенностью является то, что практичность обеспечивается за счет доступности учеников к разнообразию преподавательского состава вузов. В сущности, данная идея не нова, но достаточно мало практик, которые готовы обеспечивать такого рода доступность, которая в т. ч. учитывает индивидуальные режимы работы и занятость своих участников. Потенциально данная практика могла бы осуществить обобщение и технологизацию дистанционных аспектов образовательного процесса в математической направленности, предложив решения для создания сетей (в т. ч. социальных), в которых были бы объединены практикующие специалисты, ученые, проектировщики |

| Название практики   | Результат по направлению  |
|---|---|
| <p>Математическое образование обучающихся 8–10 классов в рамках тьюторского сопровождения участников летнего стационарного специализированного (профильного) лагеря для одаренных детей</p>   | <p>Одним из важнейших аспектов практикоориентированности (в отношении содержания и методического обеспечения практики) является специальное проектирование межпредметных и метапредметных заданий (задач/проблем). Данная практика ориентирована на специальное удержание таких связей. Например, участники решают задания, которые направлены на применение методов работы с процентами не только в примерах математических исчислений, но и в разнообразных экономических и предпринимательских ситуациях повседневности. Данный опыт может быть использован в целях расширения методической базы для ряда математических образовательных практик</p> |
| <p>Проект «Повышение качества общего математического образования за счет создания и использования электронного контента исследовательского обучения математике в соответствии с требованиями ФГОС» в рамках Российско-Болгарского проекта «Методики и информационные технологии в образовании» (МИТЕ)</p> | <p>Достаточно сильной стороной представленной практики является разработка мощного программного обеспечения, которое позволяет разворачивать достаточно полное и глубокое математическое моделирование. В сущности, построенный в ней учебный процесс ориентирован на проработку прикладных аспектов математического знания и качественную реализацию инструментов математического моделирования в проектной деятельности. Сегодня испытывается высокий дефицит подобных технологий в практиках математического образования</p>   |
| <p>Тьюторское сопровождение учебно-исследовательской деятельности обучающихся</p>   | <p>Данная практика построена в соответствии с технологиями тьюторского сопровождения. Практикоориентированность в рамках таких практик задается индивидуальными образовательными потребностями и стратегическими ориентировками самого ученика</p>  |

| Название практики   | Результат по направлению  |
|---|---|
| Международный образовательный проект «Афлатун: социальное и финансовое образование детей» | Примечательная особенность данной практики заключается в том, что в рамках ее деятельности осуществляется работа с младшими школьниками по погружению их в финансовую и социальную действительность за счет средств математического мышления. В сущности, данная практика может иметь значение в плане технологизации процессов раннего становления математической онтологии  |
| Модель профильного инженерно — технического образования                                   | Данная практика имеет робототехническую содержательно-тематическую направленность и работает в условиях развития технопарков. В сущности, данный сюжет является достаточно распространенным и популярным на сегодняшний день, но в действительности мало какие практики способны обеспечить достижение какого-либо реально значимого образовательного результата в условиях работы технопарков. В сущности, в рамках таких практик детям позволяют решать типовые задачи, а не выходить на продуцирование практически-значимых разработок. Потенциально такая практика может быть подвержена тиражированию в том случае, если докажет свою способность моделировать сложные («взрослые») процессы коллективно-распределенной деятельности в рамках прикладного проектирования |
| Учебная практика учащихся 10-х классов (проведение учебных исследований)                  | Данная практика иллюстрирует интересный опыт с точки зрения обеспечения преемственности человеческого потенциала между школой и вузом. В ее рамках реализуется имитация условий студенческой жизни (в классическом университете), осуществляется научно-исследовательская работа, распределяются научные руководители, проводятся защиты и предзащиты и т. д. Для математического образования это является важным аспектом, и опыт данной практики может быть полезен при проектировании своеобразных социальных тренажеров, обеспечивающих готовность к работе в вузе и открывающих объективное понятие университета   |



| Название практики   | Результат по направлению   |
|---|--|
| Учебные сборы для высокомотивированных обучающихся                | Данная практика обеспечивает взаимосвязь и контакт своих учеников с градообразующими предприятиями, а именно — ученикам позволяют работать на оборудовании данного предприятия. Построение таких связей математической практики с каким-либо предприятием является принципиально важным вопросом для увеличения степени практикоориентированности математического образования, и опыт данной практики может оказать положительное влияние с методической точки зрения  |
| Интеграция школьного математического образования, науки и бизнеса | Образовательная деятельность построена таким образом, что выстраивается взаимосвязь математической сферы деятельности с предпринимательскими компетенциями. На сегодняшний день построение таких полипрофессиональных образовательных ориентировок представляет особую важность для сфер фундаментальных наук  |
| Межпредметные погружения  | Одним из важнейших аспектов практикоориентированности (в отношении содержания и методического обеспечения практики) является специальное проектирование межпредметных и метапредметных заданий (задач/проблем). Данная практика ориентирована на специальное удержание таких связей. Например, участники решают задания, которые направлены на применение методов работы с процентами не только в примерах математических исчислений, но и в разнообразных экономических и предпринимательских ситуациях повседневности. Данный опыт может быть использован в целях расширения методической базы для ряда математических образовательных практик |
| Лаборатория информатики и вычислительной техники для детей        | Данная лаборатория представляет потенциальный интерес для реализации принципов практикоориентированности в математическом образовании, т. к. может погружать детей в прикладные области математического знания за счет воспроизводства культурного процесса производства наукоемкого прикладного продукта  |

| Название практики  | Результат по направлению   |
|--|--|
| «Детская научно-техническая школа»   | Данная практика ориентирована на классические советско-кружковые представления о практикоориентированности. В этом смысле интерес представляет возможность подвергнуть модернизации данные типы построения практикоориентированной образовательной деятельности  |
| Повышение интеллектуального потенциала сельских школьников в системе дополнительного образования Республики Коми (из опыта работы Коми республиканского очно-заочного лицея-интерната для одаренных детей из сельской местности) | Практичность представляется в аспекте работы с сельскими школьниками посредством выездных мероприятий. Программы данной направленности являются крайне востребованными на сегодняшний день. В этом смысле речь может идти о развитии аспектов, связанных с формированием математической грамотности и разработки соответствующих технологических пакетов                                     |
| Кружок дополнительного образования «Шахматы»   | В рамках данной практики удерживается аспект шахмат как тренажера математически-организованного мышления. В этом смысле стратегичность, которая отрабатывается в рамках шахматной игры, является неотъемлемым элементом практического и математически организованного мышления   |
| «Измерительная работа на местности»  | Измерительная работа на местности реализует идеи соответствия математического образования прикладным областям деятельности. В сущности, подобные элементы должны быть встроены в массовые математические практики с целью увеличения их степени соответствия деятельностным принципам построения образования   |
| Развитие математических способностей учащихся на основе социального партнерства  | В рамках данной практики отрабатывается связь учеников именно с потенциальными работодателями. При этом практика позиционирует себя как элемент формирования кадровых резервов. Понимание того, как может быть построено подобное социальное позиционирование в пространстве регионов, является очень важным сюжетом не только для практик математического образования, но и для всех прочих |

| Название практики   | Результат по направлению  |
|---|---|
| Проектно-исследовательская лаборатория обучающихся в образовательной области «Технология» (формирование инженерных компетенций) | Данная лаборатория представляет потенциальный интерес для реализации принципов практикоориентированности в математическом образовании, т. к. может погружать детей в прикладные области математического знания за счет воспроизводства культурного процесса производства наукоемкого прикладного продукта |

### 1.2. Аналитические результаты, представляемые по направлению «Реализация индивидуально ориентированных принципов, подходов и технологий»

| Название практики  | Результат по направлению   |
|--|--|
| Центр олимпиадной подготовки для школьников и студентов по математике и программированию                 | В рамках данной практики отрабатываются схемы взаимодействия участников с учеными и студентами (схема классического тьюторства). Данные элементы должны быть подвержены дальнейшему обобщению и редуцированию комплексного и разноуровневого технологического пакета для практик математического образования детей   |
| Элективные курсы «Функции от простого к сложному», «Нестандартные методы решения уравнений и неравенств» | В рамках данной практики реализуется идея разноуровневости программ и заданий посредством использования информационных технологий в образовании. Под разноуровневостью понимается учет стартовых возможностей и способностей ученика по освоению учебного содержания, темп и многообразие форматов, позволяющих более эффективно освоить данное содержание исходя из индивидуальных особенностей конкретного ученика |
| Профильный оздоровительный лагерь «Летняя математическая школа в Республике Адыгея» (ЛМШ)                | В рамках данной практики реализуются потенциально-продуктивные технологии индивидуального образовательного продюсирования лучших учеников представляемой практики  |

| Название практики  | Результат по направлению  |
|--|---|
| «Детская научно-техническая школа»                                   | В рамках представленной практики осуществляется поддержка самоопределения и индивидуальных траекторий учащихся  |
| Обнинская малая академия наук (педагогическое содружество «Афалина») | Реализуется схема математического наставничества. Примечательно то, что технологии тьюторства получили достаточно серьезное развитие в нашей стране за последнее десятилетие, а практики наставничества так и не получили полноценного институционального развития и становления, так как отсутствует какой-либо субъект, ориентированный на развитие таких технологий. В этом смысле данная практика смогла бы сделать шаг в обобщении наставнических технологий и выйти на шаг развития в отношении такой педагогической позиции, как наставник |
| Творческое объединение «Сигма»                                       | В рамках представленной практики осуществляется поддержка самоопределения и индивидуальных траекторий учащихся  |
| Программа «Одаренные дети»   | Реализуется схема математического наставничества. Примечательно то, что технологии тьюторства получили достаточно серьезное развитие в нашей стране за последнее десятилетие, а практики наставничества так и не получили полноценного институционального развития и становления, так как отсутствует какой-либо субъект, ориентированный на развитие таких технологий. В этом смысле данная практика смогла бы сделать шаг в обобщении наставнических технологий и выйти на шаг развития в отношении такой педагогической позиции, как наставник |
| Специальные курсы «Решение задач повышенной сложности по математике» | Данная практика представляет интерес в отношении развития технологий составления и разработки образовательных карт для учащихся по математическим направлениям  |

скачок?  
«шаг»  
дважды  
повторяется  
в этом  
предложении

| Название практики   | Результат по направлению  |
|---|---|
| «Метод проектов как эффективное средство развития метапредметных компетенций обучающихся на уроках физики, математики, информатики и во внеурочное время» | Данная практика представляет достаточно интересный концепт представления аспектов работы с индивидуальностью учеников, так как здесь делается акцент на представлении личности ученика через проект как продукт, который сможет дать деятельностные интерпретации его индивидуальных особенностей   |
| Факультатив ЗФТШ МФТИ   | В данной практике позиционируется наличие тьюторских и наставнических позиций, формирование индивидуальных учебных планов и обучение по профилям. Все это является базовыми составляющими разворачивания процессов индивидуализации в образовательной практике. Представленный опыт может быть подвергнут массовому распространению и обобщен в методические рекомендации по качественному исполнению данных, составляющих в многообразии образовательных программ в рамках факультативов |
| Региональный фестиваль «РобоФест-НН» общероссийской Программы «Робототехника: инженерно-технические кадры инновационной России»                           | В рамках данной практики реализуются схемы построения тьюторского сопровождения участников практики. На сегодняшний день необходимо выработать технологический пакет тьютора в области математического образования как специфически организованного. Опыт данной практики может эффективно способствовать при решении данной задачи   |
| Система работы с одаренными учащимися   | В рамках данной практики реализуются схемы построения тьюторского сопровождения участников практики (как консультационно-устроенное в пространстве внеурочной работы). На сегодняшний день необходимо выработать технологический пакет тьютора в области математического образования как специфически организованного. Опыт данной практики может эффективно способствовать при решении данной задачи   |

| Название практики   | Результат по направлению   |
|---|--|
| <p>Центр по работе с талантливыми и одаренными детьми на базе МКОУ СОШ № 1 г. Лиски Воронежской области</p>   | <p>В рамках представленной практики осуществляется поддержка самоопределения и индивидуальных траекторий учащихся</p>  |
| <p>Математическое образование обучающихся 8–10 классов в рамках тьюторского сопровождения участников летнего стационарного специализированного (профильного) лагеря для одаренных детей</p>   | <p>В рамках данной практики реализуются схемы построения тьюторского сопровождения участников практики (в действительности профильного лагеря). На сегодняшний день необходимо выработать технологический пакет тьютора в области математического образования как специфически организованного. Опыт данной практики может эффективно способствовать при решении данной задачи</p> |
| <p>Проект «Повышение качества общего математического образования за счет создания и использования электронного контента исследовательского обучения математике в соответствии с требованиями ФГОС» в рамках Российско-Болгарского проекта «Методики и информационные технологии в образовании» (MITE)</p> | <p>В рамках данного проекта реализуются идеи построения разноуровневых заданий, индивидуально-тьюторского сопровождения участников проекта, а также отдельное обеспечение научного наставничества для участников проекта</p>   |

| Название практики   | Результат по направлению  |
|---|---|
| Тьюторское сопровождение учебно-исследовательской деятельности обучающихся  | В рамках данной практики реализуются схемы построения тьюторского сопровождения участников практики (на материале классической научно-исследовательской деятельности). На сегодняшний день необходимо выработать технологический пакет тьютора в области математического образования как специфически организованного. Опыт данной практики может эффективно способствовать при решении данной задачи     |
| Центр по работе с одаренными детьми «Талант»  | Данная практика представляет интерес в отношении развития технологий составления и разработки индивидуальных образовательных траекторий для учащихся по математическим направлениям   |
| Объединение естественно-научной направленности по углубленному изучению физики, математике, химии и биологии «Планета — Изумрудный город» | В рамках данной практики интересна реализация элемента наставничества, который интерпретируется авторами самой практики как реализация схем кураторства учеников. Суть в том, что выпускникам практики предоставляется слуга по долгосрочному наставническому сопровождению как во время обучения в вузе, так и по его окончанию  |
| Игра «Математическое домино»  | Данная игра представляется как инструмент выявления математически грамотных и оснащенных детей. После того, как детей выявляют, им предоставляется адресное приглашение в какую-либо организацию, занимающуюся более углубленным математическим образованием. Данная практика также интересна с точки зрения построения деятельности по навигации в пространстве математического образования              |
| Учебная практика учащихся 10-х классов (проведение учебных исследований)  | В рамках данной практики реализуются схемы построения тьюторского сопровождения участников практики (на материале формирования индивидуальных исследовательских проектов). На сегодняшний день необходимо выработать технологический пакет тьютора в области математического образования как специфически организованного. Опыт данной практики может эффективно способствовать при решении данной задачи |

| Название практики  | Результат по направлению  |
|--|---|
| Общеразвивающая программа дополнительного образования «Олимпиадная математика» | Данная практика представляет интерес в отношении развития технологий составления и разработки индивидуальных образовательных траекторий для учащихся по математическим направлениям   |
| «Реализация и развитие потенциальных способностей одаренных детей»             | В рамках представленной практики осуществляется поддержка самоопределения и индивидуальных траекторий учащихся  |
| Лаборатория информатики и вычислительной техники для детей                     | Данная практика представляет интерес в отношении развития технологий составления и разработки индивидуальных образовательных траекторий для учащихся по математическим направлениям. В рамках данной практики выделяется отдельный год для работы с учениками конкретно по индивидуальным траекториям |

### 1.3. Аналитические результаты, представляемые по направлению «Пространство авторского действия»

| Название практики   | Результат по направлению   |
|---|--|
| Математический кружок «Методика решения нестандартных задач», олимпиады по математике | Погружение в исследовательскую деятельность потенциально подразумевает погружение ученика в действительность авторского действия. Но существует риск включения ученика в типовые и шаблонные исследовательские разработки, которые лишь имитируют исследовательскую деятельность, но не воспроизводят ее |
| «Детская научно-техническая школа»  | Многообразие форматов представления интеллектуальной деятельности дает возможность для авторства ученикам  |



| Название практики  | Результат по направлению  |
|--|---|
| Проект «Математическое образование через учебно-исследовательскую деятельность»  | Создается удовлетворяющая среда (здесь речь может идти о качестве авторства, которое может гарантировать эта среда). В этом смысле данная практика обеспечивает принцип минимальной достаточности с точки зрения возникновения частных авторских интенций учеников  |
| Обнинская малая академия наук (педагогическое сообщество «Афалина»)  | Создается удовлетворяющая среда (здесь речь может идти о качестве авторства, которое может гарантировать эта среда). В этом смысле данная практика обеспечивает принцип минимальной достаточности с точки зрения возникновения частных авторских интенций учеников  |
| Региональный фестиваль «РобоФест-НН» общероссийской Программы «Робототехника: инженерно-технические кадры инновационной России»  | Создается удовлетворяющая среда (здесь речь может идти о качестве авторства, которое может гарантировать эта среда). В этом смысле данная практика обеспечивает принцип минимальной достаточности с точки зрения возникновения частных авторских интенций учеников в границах содержательно-тематического направления данной практики. Ограничения такого авторского пространства — это возможности того робототехнического оборудования, которое представлено в рамках данной практики |
| «Математические лабиринты» (обучающиеся 7–9 классов); «Математические изюминки» (обучающиеся 10–11 классов)  | Данная практика старается воспроизвести исследовательскую деятельность как авторски-ориентированную. Судя по описанию этапов практики, содержание организовано линейно-дидактически, что сильно сужает возможность авторского действия. При этом заявляются инженерные разработки, исследования и т. д., но есть основания полагать, что данные направления представляются как запланированные и уже заранее спроектированные педагогом   |
| Математическое образование обучающихся 8–10 классов в рамках тьюторского сопровождения участников летнего стационарного специализированного (профильного) лагеря для одаренных детей | Частично создается условие для авторского действия за счет требования к ученикам по созданию нового способа исчисления  |

| Название практики   | Результат по направлению   |
|---|--|
| <p>Проект «Повышение качества общего математического образования за счет создания и использования электронного контента исследовательского обучения математике в соответствии с требованиями ФГОС» в рамках Российско-Болгарского проекта «Методики и информационные технологии в образовании» (MITE)</p> | <p>Комплекс программного (информационно-технологического) обеспечения позволяет реализовать авторские интенции учеников. Но при этом сами возможности данного программного обеспечения могут выставлять существенные ограничения на потенциал тех или иных идей участников</p>   |
| <p>Тьюторское сопровождение учебно-исследовательской деятельности обучающихся</p>   | <p>В рамках тьюторского сопровождения базовым элементом работы является индивидуальный интерес ученика. За счет комплекса диагностики образовательных интересов и потребностей ученика возможно обеспечение выхода ученика к авторскому действию</p>   |
| <p>Модель профильного инженерно-технического образования</p>  | <p>Создается удовлетворяющая среда (здесь речь может идти о качестве авторства, которое может гарантировать эта среда). В этом смысле данная практика обеспечивает принцип минимальной достаточности с точки зрения возникновения частных авторских интенций учеников в границах содержательнотематического направления данной практики. Ограничения такого авторского пространства — это возможности того оборудования, которое представлено в рамках данной практики</p> |

#### 1.4. Аналитические результаты, представляемые по направлению «Электичность методов»

| Название практики   | Результат по направлению  |
|---|---|
| Профильный оздоровительный лагерь «Летняя математическая школа в Республике Адыгея» (ЛМШ)   | В практике представлен опыт геймификации процесса образования, внедрение элементов исследовательской деятельности, проведение интенсивных погружений, а также реализация дистанционных методов обучения   |
| «Детская научно-техническая школа»  | В практике представлено многообразие методов работы с детьми, которые способны обеспечить моделирование реальной научно-технической деятельности, но при этом можно фиксировать определенные недостатки, которые не позволяют погрузиться в данный вид деятельности во всей полноте   |
| Реализация дополнительного математического образования обучающихся начальной школы через систему творческих объединений (кружков) (младшие) | В практике представлен опыт организации кружков, студий, модульных курсов, внедрения элементов исследовательской деятельности, реализации соревновательных форматов   |
| Творческое объединение «Сигма»  | В рамках данной практики реализуется потенциально интересный синтез методов ТРИЗ-педагогике (теория решения изобретательских задач) и методов мыследеятельностной педагогики  |
| Специальные курсы «Решение задач повышенной сложности по математике»  | В практике представлен опыт организации летней школы для детей, элективных курсов, реализация соревновательных форматов   |
| Система работы с одаренными учащимися   | В практике представлен опыт организации экспертных лекций в синтезе с организацией летнего отдыха и информационными технологиями образования  |
| Совершенствование математического образования в лицее   | Данная практика направлена на то, чтобы обеспечить совершенствование математического образования в лицее посредством внедрения разнообразных методических подходов к организации учебного процесса. Таким образом, в практике представлен синтез таких образовательных технологий, как Развивающее обучение и Коллективный способ обучения. При этом в рамках данной практики организуется летний образовательный отдых детей |

| Название практики   | Результат по направлению  |
|---|---|
| <p>Центр по работе с талантливыми и одаренными детьми на базе МКОУ СОШ № 1 г. Лиски Воронежской области</p>   | <p>Комплекс методов, представленных в данной практике, направлен на организацию предварительного отбора учеников с целью обеспечения дальнейшего качественного индивидуального сопровождения тех учеников, которые прошли данный этап. Примечательно то, что таких практик, которые обеспечивают организационно-педагогическую надстройку относительно разнообразных процедур отбора детей, на сегодняшний день достаточно мало</p> |
| <p>«Математические лабиринты» (обучающиеся 7–9 классов);<br/>«Математические изюминки» (обучающиеся 10–11 классов)</p>  | <p>В практике представлен опыт дистанционного обучения детей (реализация формулы очно-заочного обучения), а также формирование математических объединений. В сущности, элементы образовательного построения данной практики могут быть интересны с точки зрения совершенствования технологий формирования разнообразия сообществ, развивающие свою деятельность в математическом содержательно-тематическом направлении</p>         |
| <p>Кружок «Математика»</p>  | <p>В практике представлен опыт реализации игровых методик, которые направлены на продуцирование учениками каких-либо творческих продуктов</p>   |
| <p>Проект «Повышение качества общего математического образования за счет создания и использования электронного контента исследовательского обучения математике в соответствии с требованиями ФГОС» в рамках Российско-Болгарского проекта «Методики и информационные технологии в образовании» (MITE)</p> | <p>В практике представлен опыт реализации методов моделирования в рамках тематики математического образования, создание геометрической среды и сопровождение исследовательской деятельности учеников. В том числе данная практика разворачивает музейную деятельность, посвященную содержательно-тематическому направлению самой практики</p>   |

| Название практики   | Результат по направлению  |
|---|---|
| Международный образовательный проект «Афлатун: социальное и финансовое образование детей»           | В практике представлен опыт реализации игровых методов и проектирования сложных заданий   |
| Центр по работе с одаренными детьми «Талант»  | В практике представлен опыт организации летних образовательных модулей, построение системы индивидуальных консультаций учащихся, организация систематической кружковой работы, а также организация соревновательных форматов среди участников   |
| Модель профильного инженерно-технического образования   | В практике представлен опыт работы в среде технопарка в синтезе с интенсивными погружениями и соревновательными форматами среди участников практики   |
| Учебная практика учащихся 10-х классов (проведение учебных исследований)                            | В практике представлен опыт работы в среде технопарка в синтезе с интенсивными погружениями и соревновательными форматами среди участников практики   |
| Организация мероприятий для школьников через городское методическое объединение учителей математики | Данная практика представляет достаточно широкий опыт по реализации массовых практик математического образования, в т. ч. и популяризации математического образования. Собственно говоря, в ее рамках представлен комплекс разнородных мероприятий, инициирующих к изучению математики как таковой |
| Интеграция школьного математического образования, науки и бизнеса                                   | В практике представлен опыт применения игровых методов в математическом образовании, применение ТРИЗ-педагогике, организация и проведение квестовых форматов, а также проведение тренинговых форматов, обеспечивающую надстройку бизнес-тематики над математической сферой знания                 |

| Название практики                  | Результат по направлению  |
|------------------------------------|---|
| План недели<br>Математики          | В практике представлен опыт методов блиц-опросов и соревнований, применение частных интерактивных методик, а также проведение ТРИЗ-марафона. Многообразие представленных в данной практике методов направлено на деятельностную популяризацию математической сферы, что позволяет массовизировать математические области деятельности   |
| «Детская научно-техническая школа» | В практике представлен опыт реализации многообразия методов на материале разных направлений практики (тематизмов): «Математика и техника», «Компьютерный класс», «Моделист», «Ракетомоделирование», «Мир электроники», модульные курсы: «Использование математических методов в психологических исследованиях», «Математическое моделирование в географии», «Применение математических знаний при решении задач по химии», «Чертеж и математические расчеты в моделизме»; интеллектуальные соревнования — интеллектуально-технический турнир «Знай и умей»; тематические образовательные смены, каникулярные программы — профориентационная смена для старшеклассников «Летняя академия „Профи“», программы развивающего отдыха — Фестиваль занимательной науки; другое: Лекторий «В мире инженерных профессий», ознакомительные экскурсии на кафедры МГТУ им. Н. Э. Баумана, заводы и предприятия города, сотрудничество с Калужским студенческим бизнес-инкубатором |

### 1.5. Аналитические результаты, представляемые по направлению «Привлекательность практики»

| Название практики  | Результат по направлению  |
|--|---|
| Центр олимпиадной подготовки для школьников и студентов по математике и программированию | Финансирование осуществляется со стороны ИТ-компаний, что говорит о привлекательности данной практики, а также из местного бюджета. Успех данной практики позиционируется как востребованность олимпиадников в математическом направлении |

| Название практики   | Результат по направлению   |
|---|--|
| Профильный оздоровительный лагерь «Летняя математическая школа в Республике Адыгея» (ЛМШ)   | В финансирование (внебюджет и региональное финансирование) и деятельностьную поддержку практики вовлечены журналы, лаборатории РАН   |
| Реализация дополнительных образовательных программ физико-математической направленности в условиях комплекса «Школа-вуз» в рамках сетевого сотрудничества МБОУ «СШ № 33» г. Смоленска и филиала ФГБОУ ВО «НИУ „МЭИ“» в г. Смоленске | Присутствует внебюджетное финансирование   |
| Региональный фестиваль «РобоФест-НН» общероссийской Программы «Робототехника: инженерно-технические кадры инновационной России»   | В рамках практики представлены следующие субъекты поддержки и партнерства: генеральный партнер — ООО «УК „Группа ГАЗ“»; партнеры: LEGO Education, ОАО «Группа ГАЗ», ООО «Газпром трансгаз Нижний Новгород», ОАО «Нижегородский завод 70-летия Победы», ОАО «ФНПЦ» НИИРТ, ПАО «НАЗ „Сокол“» ОАО «Гидромаш», Музей занимательных наук «Кварки» |
| Совершенствование математического образования в лицее   | Присутствует внебюджетное финансирование   |

| <b>Название практики</b>   | <b>Результат по направлению</b>                                      |
|--|--|
| Проект «Повышение качества общего математического образования за счет создания и использования электронного контента исследовательского обучения математике в соответствии с требованиями ФГОС» в рамках Российско-Болгарского проекта «Методики и информационные технологии в образовании» (МИТЕ) | Присутствует внебюджетное и федеральное финансирование               |
| Центр по работе с одаренными детьми «Талант»   | Присутствует внебюджетное финансирование за счет грантовой поддержки |
| Курс дополнительного образования «решение олимпиадных задач по математике»   | Все финансирование внебюджетное                                      |
| Интеграция школьного математического образования, науки и бизнеса  | Присутствует внебюджетное финансирование                             |



**1.6. Аналитические результаты, представляемые по направлению «Использование информационных технологий»**

| <b>Название практики</b>  | <b>Результат по направлению</b>  |
|---|--|
| Элективные курсы:<br>«Функции от простого к сложному»,<br>«Нестандартные методы решения уравнений и неравенств» | В практике представлено использование некоторых информационных технологий, направленных на частичную поддержку учебного процесса   |
| Профильный оздоровительный лагерь «Летняя математическая школа в Республике Адыгея» (ЛМШ)                       | В практике представлено многообразие интернет-проектов, направленных на популяризацию математического знания и поддержку преподавательской активности внутри данных ресурсов |
| Творческое объединение «Сигма»  | Представлены информационные ресурсы, позволяющие осуществлять теоретическое моделирование  |
| Специальные курсы «Решение задач повышенной сложности по математике»  | В практике представлено многообразие информационных ресурсов, направленных на разностороннюю поддержку учебной деятельности  |
| Преподавание курса «Наглядная геометрия» в МБОУ СШ № 2 и в летней математической школе «Интеллектуал»           | В практике представлен один интернет-проект  |
| «Математические лабиринты» (обучающиеся 7–9 классов);<br>«Математические изюминки» (обучающиеся 10–11 классов)  | В практике представлено наличие дистанционной программы  |

| Название практики   | Результат по направлению   |
|---|--|
| <p>Дистанционная физико-математическая школа</p>  | <p>В данной практике представлена программа дистанционной физико-математической школы, которая могла бы выступать в качестве тиражируемой технологии, позволяющей перевести в дистанционный формат и оптимизировать подготовку детей к олимпиадам. В рамках практики развернут информационный портал, где осуществляется размещение рейтингов и осуществляется следование принципам открытости</p> |
| <p>Проект «Повышение качества общего математического образования за счет создания и использования электронного контента исследовательского обучения математике в соответствии с требованиями ФГОС» в рамках Российско-Болгарского проекта «Методики и информационные технологии в образовании» (MITE)</p> | <p>Данная практика представлена как дистанционная, реализуемая на платформе глубокого программного обеспечения. Представляемые порталы наполнены исследовательским контентом и интерактивной геометрической средой</p>   |
| <p>Тьюторское сопровождение учебно-исследовательской деятельности обучающихся</p>   | <p>В практике представлено использование некоторых информационных технологий, направленных на частичную поддержку учебного процесса</p>  |

| <b>Название практики</b>   | <b>Результат по направлению</b>   |
|--|---|
| Международный образовательный проект «Афлатун: социальное и финансовое образование детей»          | В практике представлено использование некоторых информационных технологий, направленных на частичную поддержку учебного процесса  |
| Модель профильного инженерно-технического образования  | В практике представлено использование некоторых информационных технологий, направленных на частичную поддержку учебного процесса  |
| Учебная практика учащихся 10-х классов (проведение учебных исследований)                           | В практике представлено использование некоторых информационных технологий, направленных на создание областного информационно-образовательно-пространства, реализующего дистанционное обучение |
| Организация внеурочной работы по программе школы «Интеллект» и занятий групп «Олимпийские резервы» | В практике представлено использование некоторых информационных технологий, направленных на частичную поддержку учебного процесса  |
| «Реализация и развитие потенциальных способностей одаренных детей»                                 | В практике представлено использование некоторых информационных технологий, направленных на проведение дистанционных туров математических олимпиад   |
| «Измерительная работа на местности»  | В практике представлено использование некоторых информационных технологий, направленных на частичную поддержку учебного процесса  |

### 1.7. Аналитические результаты, представляемые по направлению «Глубина содержания»

| Название практики  | Результат по направлению  |
|--|---|
| <p>Центр олимпиадной подготовки для школьников и студентов по математике и программированию</p>  | <p>Содержание в данной практике представлено как достаточно углубленное, но при этом однородно организованное: дети решают только лишь олимпиадно-направленные задания</p>  |
| <p>Элективные курсы: «Функции от простого к сложному», «Нестандартные методы решения уравнений и неравенств»</p>   | <p>Содержание в данной практике представлено как достаточно углубленное, но устроенное монологично и линейно в рамках элективных курсов, которые направлены лишь на углубление базовых знаний с целью осуществления эффективной подготовки к участию в олимпиадах</p> |
| <p>Специальные курсы «Решение задач повышенной сложности по математике»</p>  | <p>Содержание в данной практике представлено как дополняющее содержание массовой школы с целью обеспечения качественной сдачи ЕГЭ и ОГЭ</p>   |
| <p>«Метод проектов как эффективное средство развития метапредметных компетенций обучающихся на уроках физики, математики, информатики и во внеурочное время»</p> | <p>В рамках данной практики акцент делается на содержании проектного образования, которое углублено в достаточной степени</p>   |
| <p>Система работы с одаренными учащимися</p>   | <p>В рамках данной практики глубина содержания обеспечивается за счет компетенции и эрудированной оснащенности самих преподавателей</p>   |

| Название практики  | Результат по направлению   |
|--|--|
| Образовательные программы «Умка», «Путешествие в страну математики»  | Глубина содержания раскрывается через достаточно подробную проработанность инновационных методов работы с младшими школьниками   |
| Центр по работе с талантливыми и одаренными детьми на базе МКОУ СОШ № 1 г. Лиски Воронежской области   | В данной практике представлена глубина организационно-управленческого содержания, которое представлено через построение централизованной схемы управления и координации работы с одаренными детьми в границах 10 школ  |
| «Избранные вопросы математики»   | В данной практике представлены достаточно серьезно проработанные содержательные методы по конструированию разноуровневых заданий   |
| Дистанционная физико-математическая школа  | Глубина содержания представлена через проработку технологий автоматизации процессов подготовки к участию в олимпиадах  |
| Проект «Повышение качества общего математического образования за счет создания и использования электронного контента исследовательского обучения математике в соответствии с требованиями ФГОС» в рамках Российско-Болгарского проекта «Методики и информационные технологии в образовании» (MITE) | В данной практике очень хорошо проработанное и методически оснащенное программное обеспечение. Представлены красочные и подробные интерфейсы с проведением семинаров для педагогов, изданием рабочих тетрадей и т. д. Фактически, содержание приравнено как околопрофессиональное и специфическое, но при этом доступное |

| Название практики   | Результат по направлению  |
|---|---|
| Международный образовательный проект «Афлатун: социальное и финансовое образование детей»                                   | В данной практике представлены достаточно серьезно проработанные содержательные методы  |
| Центр по работе с одаренными детьми «Талант»  | В данной практике представлены достаточно серьезно проработанные содержательные методы, представленные в многообразных форматах, в т. ч. и игровых  |
| Курс дополнительного образования «решение олимпиадных задач по математике»  | Глубина содержания отражается в организации (вообще в наличии самой возможности проводить) ежегодных погружений участников практики с участием преподавателей Федерального университета, что обеспечивает возможность углубления участников на фундаментальный уровень математического знания |
| Международные математические игры математического сообщества «Точка опоры» Гимназия № 1 г. Полярные Зори Мурманской области | В данной практике представлен достаточный уровень проработанности содержания в рамках концепции популяризации математического знания  |
| Организация мероприятий для школьников через городское методическое объединение учителей математики                         | В данной практике представлен достаточный уровень проработанности содержания в рамках концепции популяризации математического знания и обеспечения мотивации детей к изучению математики  |
| Интеграция школьного математического образования, науки и бизнеса   | В рамках данной практики представлено специфическое и самоценное для математической сферы деятельности содержание бизнес-направленности   |

• что значит «возможность углубления участников...»? лучше переформулировать

| Название практики  | Результат по направлению   |
|--|--|
| Межпредметные погружения   | В данной практике представлен достаточный уровень проработанности содержания в рамках представления метапредметных задач   |
| «Занимательная математика»   | В рамках данной практики представлен комплекс достаточно проработанных нетипичных математических задач, которые могут представлять методическую ценность для других практик математической направленности  |
| Повышение интеллектуального потенциала сельских школьников в системе дополнительного образования Республики Коми (из опыта работы Коми республиканского очно-заочного лицея-интерната для одаренных детей из сельской местности) | Содержание данной практики представляется как актуальное и в достаточной степени проработанное. Ценность представляет именно направленность доступности математического содержания для сельских школьников, что имеет мотивационную ценность и может быть построено как иницилирующая технология |

### 1.8. Аналитические результаты, представляемые по направлению «Результативность»

| Название практики  | Результат по направлению   |
|--|--|
| Центр олимпиадной подготовки для школьников и студентов по математике и программированию | Высокий уровень результативности, который представлен в соответствии с заявленными целями практики |

| Название практики   | Результат по направлению   |
|---|--|
| Профильный оздоровительный лагерь «Летняя математическая школа в Республике Адыгея» (ЛМШ)   | Высокий уровень результативности, который представлен достижениями учащихся на международном уровне. При этом 85 % учащихся поступили в профильные вузы страны |
| Государственное бюджетное образовательное учреждение дополнительного образования Республики Адыгея «Республиканская естественно-математическая школа при Адыгейском государственном университете» | Высокий уровень результативности, который представлен достижениями учащихся на международном уровне  |
| «Детская научно-техническая школа»  | Высокий уровень результативности, который представлен достижениями учащихся на международном уровне  |
| Гимназия № 16 Тракторозаводского района Волгограда  | Высокий уровень результативности, который представлен достижениями учащихся на международном уровне  |
| Реализация дополнительного математического образования обучающихся начальной школы через систему творческих объединений (кружков) (младшие)   | Высокий уровень результативности, который представлен достижениями учащихся на международном уровне  |
| Программа «Одаренные дети»  | Высокий уровень результативности, который представлен достижениями учащихся на международном уровне  |



| <b>Название практики</b>  | <b>Результат по направлению</b>   |
|---|---|
| Специальные курсы «Решение задач повышенной сложности по математике»  | Высокий уровень результативности, который представлен достижениями учащихся на международном уровне |
| «Метод проектов как эффективное средство развития метапредметных компетенций обучающихся на уроках физики, математики, информатики и во внеурочное время»   | Высокий уровень результативности, который представлен достижениями учащихся на международном уровне |
| Реализация дополнительных образовательных программ физико-математической направленности в условиях комплекса «Школа—вуз» в рамках сетевого сотрудничества МБОУ «СШ № 33» г. Смоленска и филиала ФГБОУ ВО «НИУ „МЭИ“» в г. Смоленске | Высокий уровень результативности, который представлен достижениями учащихся на международном уровне |
| Преподавание курса «Наглядная геометрия» в МБОУ СШ № 2 и в летней математической школе «Интеллектуал»   | Высокий уровень результативности, который представлен достижениями учащихся на международном уровне |
| Факультатив ЗФТШ МФТИ   | Высокий уровень результативности, который представлен достижениями учащихся на международном уровне |

| Название практики   | Результат по направлению   |
|---|--|
| Региональный фестиваль «РобоФест-НН» общероссийской Программы «Робототехника: инженерно-технические кадры инновационной России» | Высокий уровень результативности, который представлен достижениями учащихся на международном уровне, а также формирование кадрового резерва для региона, что делает результаты практики целесообразными  |
| Система работы с одаренными учащимися   | Высокий уровень результативности, который представлен достижениями учащихся на международном уровне. А также поступлением участников практики в кол-ве 102 человека в ведущие вузы страны (МГУ, МИФИ, МФТИ, СПбГУ, МВТУ); также практика получает грантовую поддержку, что также свидетельствует о хорошем уровне продуктивности |
| Система работы с одаренными учащимися   | Высокий уровень результативности, который представлен достижениями учащихся на международном уровне, а также поступлением участников практики в специализированные вузы страны (в т. ч. МГУ (32 чел.)). Также, коллектив, реализующий данную практику имеет многообразие публикаций (в том числе в международных изданиях)       |
| Центр по работе с талантливыми и одаренными детьми на базе МКОУ СОШ № 1 г. Лиски Воронежской области                            | Высокий уровень результативности, который представлен достижениями учащихся на всероссийском уровне  |
| Курс «Основы проектной деятельности. Реальная математика»   | Высокий уровень результативности, который представлен достижениями учащихся на всероссийском уровне  |

«Система работы с одаренными учащимися» выше в таблице повторяется дважды, так и должно быть?

!

| Название практики  | Результат по направлению  |
|--|---|
| Элективные курсы и летняя математическая школа   | Высокий уровень результативности, который представлен достижениями учащихся на всероссийском уровне   |
| «Математические лабиринты» (обучающиеся 7–9 классов);<br>«Математические изюминки» (обучающиеся 10–11 классов)   | Высокий уровень результативности, который представлен достижениями учащихся на международном уровне. При этом учащиеся поступают в профильные вузы страны |
| Кружок «Математика»  | Высокий уровень результативности, который представлен достижениями учащихся на международном уровне   |
| «Избранные вопросы математики»   | Высокий уровень результативности, который представлен достижениями учащихся на всероссийском уровне   |
| Проект «Повышение качества общего математического образования за счет создания и использования электронного контента исследовательского обучения математике в соответствии с требованиями ФГОС» в рамках Российско-Болгарского проекта «Методики и информационные технологии в образовании» (MITE) | Высокий уровень результативности, который представлен достижениями учащихся на международном уровне   |

| Название практики   | Результат по направлению  |
|---|---|
| Тьюторское сопровождение учебно-исследовательской деятельности обучающихся  | Высокий уровень результативности, который представлен достижениями учащихся на всероссийском уровне   |
| Международный образовательный проект «Афлатун: социальное и финансовое образование детей»   | Высокий уровень результативности, который представлен достижениями учащихся на международном уровне   |
| Центр по работе с одаренными детьми «Талант»  | Высокий уровень результативности, который представлен достижениями учащихся на всероссийском уровне. Также в качестве ключевых показателей эффективности практики рассматривается лонгитюдный результат, где представлено становление 20-ти ученых (5 из которых уже являются кандидатами наук) |
| Курс дополнительного образования «решение олимпиадных задач по математике»  | Высокий уровень результативности, который представлен достижениями учащихся на всероссийском уровне   |
| Объединение естественно-научной направленности по углубленному изучению физики, математике, химии и биологии «Планета — Изумрудный город» | Высокий уровень результативности, который представлен достижениями учащихся на всероссийском уровне   |
| Дополнительная общеобразовательная общеразвивающая программа «Умники и умницы»  | Высокий уровень результативности, который представлен достижениями учащихся на международном уровне   |

| Название практики  | Результат по направлению  |
|--|---|
| Система работы с математически одаренными детьми Республики Саха (Якутия) (Учебно-тренировочные сборы; зимние, летние школы; выездные школы; олимпиады и конкурсы)                 | Высокий уровень результативности, который представлен достижениями учащихся на международном уровне |
| Государственное бюджетное образовательное учреждение дополнительного образования детей «Ленинградский областной центр развития творчества одаренных детей и юношества „Интеллект“» | Высокий уровень результативности, который представлен достижениями учащихся на международном уровне |
| Система кружков, элективных курсов, учебные исследования, интеллектуальные соревнования  | Высокий уровень результативности, который представлен достижениями учащихся на международном уровне |
| Модель профильного инженерно-технического образования  | Высокий уровень результативности, который представлен достижениями учащихся на международном уровне |
| Программа работы с одаренными детьми. Математика   | Высокий уровень результативности, который представлен достижениями учащихся на международном уровне |

### 1.9. Аналитические результаты, представляемые по критерию «Сетевые построения»

| Название практики  | Результат по направлению  |
|--|---|
| Учебная практика учащихся 10-х классов (проведение учебных исследований)   | Высокий уровень результативности, который представлен достижениями учащихся на международном уровне |
| Организация внеурочной работы по программе школы «Интеллект» и занятий групп «Олимпийские резервы»   | Высокий уровень результативности, который представлен достижениями учащихся на международном уровне |
| Деловая интерактивная игра «Детективное агентство-13» (АНПО «Образовательный центр „Участие“» (Санкт-Петербург)); модифицированные варианты, разработанные гимназией | Высокий уровень результативности, который представлен достижениями учащихся на международном уровне |
| Учебные сборы для высокомотивированных обучающихся   | Высокий уровень результативности, который представлен достижениями учащихся на международном уровне |
| Интеграция школьного математического образования, науки и бизнеса  | Высокий уровень результативности, который представлен достижениями учащихся на международном уровне |

| Название практики   | Результат по направлению   |
|---|--|
| «Реализация и развитие потенциальных способностей одаренных детей»  | Высокий уровень результативности, который представлен достижениями учащихся на международном уровне  |
| Центр олимпиадной подготовки для школьников и студентов по математике и программированию                  | Сетевое построение представлено через взаимодействие Республики Бурятия с Забайкальским краем. При этом, отсутствует межведомственная связь. Кадровый оргпроект построен по принципу построения диадных связей   |
| Элективные курсы: «Функции от простого к сложному», «Нестандартные методы решения уравнений и неравенств» | Сетевое построение представлено через взаимодействие 6 образовательных организаций и представителями высшей школы  |
| Профильный оздоровительный лагерь «Летняя математическая школа в Республике Адыгея» (ЛМШ)                 | Сетевое построение представлено через взаимодействие 15 регионов. В педагогический оргпроект вовлечены представители студенчества, что усиливает межпоколенческую преемственность, а также кандидаты наук  |
| «Детская научно-техническая школа»  | В педагогическом оргпроекте наряду с педагогами привлечены научные работники   |
| Проект «Математическое образование через учебно-исследовательскую деятельность»                           | Сетевое построение представлено через взаимодействие 46 образовательных учреждений с научным сектором, некоммерческими организациями и детской общественной организацией. Педагогический оргпроект комбинирует позиции классических педагогов, представителей науки и представителей бизнеса |

| Название практики   | Результат по направлению   |
|---|--|
| Обнинская малая академия наук (педагогическое содружество «Афалина»)  | Сетевое построение представлено через взаимодействие образовательной организации и представителями высшей школы  |
| Гимназия № 16 Тракторозаводского района Волгограда  | Сетевое построение представлено через взаимодействие образовательной организации и представителями высшей школы, научными работниками                                      |
| Реализация дополнительного математического образования обучающихся начальной школы через систему творческих объединений (кружков) (младшие)   | Педагогический оргпроект представлен через взаимодействие классических педагогических позиций с психологами. Сетевое взаимодействие как такое отсутствует                  |
| Программа «Одаренные дети»  | Сетевое построение представлено через взаимодействие образовательной организации и научными работниками  |
| Специальные курсы «Решение задач повышенной сложности по математике»  | Сетевое построение представлено через взаимодействие образовательной организации с кафедрой физики и технологических дисциплин, где сотрудники привлекаются к преподаванию |
| Реализация дополнительных образовательных программ физико-математической направленности в условиях комплекса «Школа—вуз» в рамках сетевого сотрудничества МБОУ «СШ № 33» г. Смоленска и филиала ФГБОУ ВО «НИУ „МЭИ“» в г. Смоленске | Сетевое построение представлено через взаимодействие образовательной организации с вузом   |



| Название практики   | Результат по направлению   |
|---|--|
| Преподавание курса «Наглядная геометрия» в МБОУ СШ № 2 и в летней математической школе «Интеллектуал»                           | Сетевое построение представлено через взаимодействие 15 образовательных организаций  |
| Факультатив ЗФТШ МФТИ   | Сетевое построение представлено через взаимодействие с МФТИ  |
| Региональный фестиваль «РобоФест-НН» общероссийской Программы «Робототехника: инженерно-технические кадры инновационной России» | Сетевое построение представлено через взаимодействие со студенчеством, учеными и иными организациями   |
| Система работы с одаренными учащимися   | Сетевое построение представлено через взаимодействие с промышленным комплексом и вузами. Педагогический оргпроект конфигурирует классических преподавателей, представителей производства (специалисты) и классические педагогические позиции |
| Совершенствование математического образования в лицее   | Сетевое построение представлено через взаимодействие лица с вузами   |
| Центр по работе с талантливыми и одаренными детьми на базе МКОУ СОШ № 1 г. Лиски Воронежской области                            | Сетевое построение представлено через взаимодействие 10 образовательных организаций  |
| Курс «Основы проектной деятельности. Реальная математика»   | Сетевое построение представлено через взаимодействие организации с вузами и 6-ю другими образовательными организациями   |

| Название практики  | Результат по направлению   |
|--|--|
| «Избранные вопросы математики»   | Сетевое построение представлено через взаимодействие организации с вузами и другими образовательными организациями. Педагогический оргпроект конфигурирует классические педагогические позиции, представителей министерства Края, а также преподавателей федерального уровня через дистанционное подключение |
| Математическое образование обучающихся 8–10 классов в рамках тьюторского сопровождения участников летнего стационарного специализированного (профильного) лагеря для одаренных детей   | Сеть построена в масштабе района   |
| Проект «Повышение качества общего математического образования за счет создания и использования электронного контента исследовательского обучения математике в соответствии с требованиями ФГОС» в рамках Российско-Болгарского проекта «Методики и информационные технологии в образовании» (MITE) | Развита сеть многообразия школ в масштабе страны, включенных в данную практику   |

| Название практики  | Результат по направлению  |
|--|---|
| Международный образовательный проект «Афлатун: социальное и финансовое образование детей»  | Сетевое построение представлено через взаимодействие 11 образовательных организаций с вузами              |
| Центр по работе с одаренными детьми «Талант»   | Сетевое построение представлено через взаимодействие организации с вузами                                 |
| Объединение естественно-научной направленности по углубленному изучению физики, математике, химии и биологии «Планета — Изумрудный город»                          | Сетевое построение представлено через взаимодействие организации с вузом                                  |
| Дополнительная общеобразовательная общеразвивающая программа «Умки и умницы»   | Сетевое построение представлено через взаимодействие 5 образовательных организаций с музеем и библиотекой |
| Система работы с математически одаренными детьми Республики Саха (Якутия) (учебно-тренировочные сборы; зимние, летние школы; выездные школы; олимпиады и конкурсы) | Сеть построена в масштабе региона   |
| Заочная математическая школа   | Сеть построена в масштабе региона и построение взаимодействие с вузом Санкт-Петербурга                    |

| Название практики  | Результат по направлению  |
|--|---|
| Государственное бюджетное образовательное учреждение дополнительного образования детей «Ленинградский областной центр развития творчества одаренных детей и юношества „Интеллект“» | Сеть представлена через взаимодействие с вузом Санкт-Петербурга   |
| Модель профильного инженерно-технического образования  | Сетевое построение представлено через взаимодействие организации с вузом  |
| «Я люблю математику»   | Сеть построена в масштабе региона   |
| Деловая интерактивная игра «Детективное агентство-13» (АНПО «Образовательный центр „Участие“» (Санкт-Петербург)); модифицированные варианты, разработанные гимназией               | Сетевое построение представлено через взаимодействие организации с ОАО «Электроприбор» и РОСНАНО  |
| Интеграция школьного математического образования, науки и бизнеса  | Сетевое построение представлено через взаимодействие организации с бизнес-инкубатором, предприятиями и предпринимателями (логистические компании, фермеры, деревообрабатывающие компании и т. д.) |